Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 14.
Теория кратности.

Вы, конечно, знаете, что кратностью собственного значения λ линейного оператора T называется размерность пространства $\operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1})$. Что следует называть кратностью точки спектра в общем случае? Теория кратности, с которой мы познакомимся на этой лекции, дает ответ на этот вопрос для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Впрочем, основное достоинство этой теории даже не в том, что она придает смысл слову «кратность», а в том, что она позволяет полностью классифицировать нормальные операторы с точностью до унитарной эквивалентности. Это означает, что каждому оператору сопоставляется некая совокупность объектов, которая является *полным набором унитарных инвариантов* в том смысле, что два оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им наборы унитарных инвариантов совпадают. Таким образом, теория кратности позволяет отвечать на вопросы о том, являются ли два данных нормальных оператора унитарно эквивалентными или нет. Кроме того, теория кратности сопоставляет каждому нормальному оператору некую красивую геометрическую модель (по ряду причин более удобную, чем функциональная модель с прошлой лекции), которая представляет и самостоятельный интерес.

Чтобы лучше понимать смысл дальнейших построений, давайте вначале посмотрим на конечномерный случай. Итак, пусть H — конечномерное гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — оператор, который мы для простоты будем предполагать самосопряженным. Тогда, как известно из линейной алгебры, H разлагается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора T:

$$H = \dot{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)}} H(\lambda), \qquad \text{где} \quad H(\lambda) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathbf{1}_H). \tag{1}$$

Следовательно, сам оператор T записывается в виде

$$T = \dot{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)}} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}. \tag{2}$$

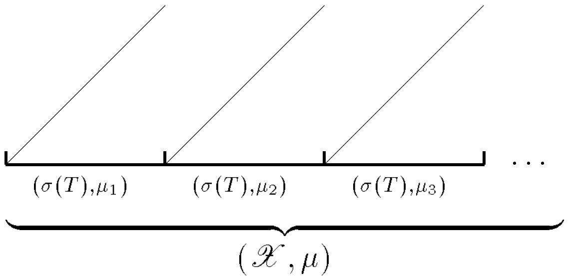
Определим *функцию кратности* m_T на $\sigma(T)$ формулой $m_T(\lambda) = \dim H(\lambda)$. Тогда пара $(\sigma(T), m_T)$ является полным набором унитарных инвариантов оператора T:

$$\boxed{S \text{ и } T \text{ унитарно эквивалентны} \iff \sigma(S) = \sigma(T) \text{ и } m_S = m_T} \tag{3}$$

Упражнение 1. Если Вы раньше не встречались с этим утверждением, то докажите его.

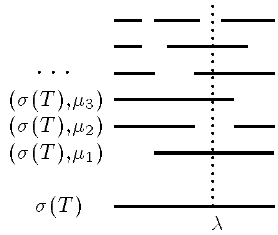
Основные результаты теории кратности, грубо говоря, представляют собой обобщения разложений (1) и (2) и утверждения (3) на бесконечномерный случай. Конечно, $H(\lambda)$ уже не будут собственными подпространствами (как Вы знаете, собственных подпространств у T вообще может не быть); более того, они, вообще говоря, не будут подпространствами в H. А разложения (1) и (2) будут уже не обычными разложениями в прямую сумму, а разложениями в так называемый «прямой интеграл».

На интуитивном уровне основной геометрический объект, сопоставляемый оператору в теории кратности, выглядит следующим образом. Из прошлой лекции мы помним, что «строительным материалом» для функциональной модели нормального оператора (или гильбертова модуля) служат циклические гильбертовы модули H_i ($i \in I$), каждый из которых изоморфен модулю вида $L^2(\sigma(T), \mu_i)$ для некоторой меры μ_i на $\sigma(T)$ (см. теоремы 1 и 2 с прошлой лекции). Для построения функциональной модели (теорема 3 с прошлой лекции) мы, говоря неформально, «склеили» друг с другом пространства с мерой $(\sigma(T), \mu_i)$ и на каждом из них рассмотрели функцию $f(t) = t$ (см. рис:)



В результате этой конструкции получаются пространство с мерой $(\mathscr{X}, \mu)$ и ограниченная измеримая функция φ на нем; при этом исходный оператор T оказывается унитарно эквивалентным оператору умножения M_φ в $L^2(\mathscr{X}, \mu)$.

Можно, однако, не «приклеивать» пространства $(\sigma(T), \mu_i)$ друг к другу, а расположить их «друг над другом» так, чтобы они проектировались на $\sigma(T)$:



Геометрический объект, который при этом возникает, называется *измеримым гильбертовым расслоением* или *измеримым полем гильбертовых пространств*. Обратите внимание, что горизонтальные отрезки на этой картинке имеют разрывы; это означает, что «на i-ом этаже» изображена не вся i-ая копия пространства $\sigma(T)$, а только носитель меры μ_i. Число точек на вертикальной прямой, т.е. размерность «слоя» над точкой $\lambda \in \sigma(T)$ — это и есть кратность этой точки. Гильбертово пространство, в котором действует оператор T, следует представлять себе как «непрерывную прямую сумму» слоев над точками $\sigma(T)$; сам же оператор «склеен» из операторов T_λ, каждый из которых действует в слое над $\lambda \in \sigma(T)$ умножением на число λ.

В частности, если H конечномерно, то спектр $\sigma(T)$ конечен, и над каждой его точкой λ «висит» соответствующее собственное подпространство $H(\lambda)$. Типичный бесконечномерный пример — оператор умножения M_t, действующий в $L^2[0,1]$ по правилу $(M_t f)(t) = t f(t)$. Пространство $L^2[0,1]$ при этом оказывается «непрерывной прямой суммой» одномерных пространств $\mathbb{C}_\lambda$ (по всем $\lambda \in [0,1]$), а оператор M_t — «непрерывной прямой суммой» операторов умножения на λ в пространстве $\mathbb{C}_\lambda$.

Перейдем теперь к строгим формулировкам.

Измеримые гильбертовы расслоения и прямые интегралы.

Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, и пусть $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ — некоторое семейство гильбертовых пространств. Прямое произведение $\prod_{\lambda\in X} H(\lambda)$ назовем *пространством сечений* этого семейства. Напомним в этой связи, что

$$\prod_{\lambda\in X} H(\lambda) = \Big\{ u\colon X \to \bigsqcup_{\lambda\in X} H(\lambda) : u(\lambda) \in H(\lambda)\ \forall \lambda \in X \Big\}.$$

Пространство $H(\lambda)$ будем называть *слоем* над $\lambda \in X$.

Говоря неформально, измеримое гильбертово расслоение – это семейство гильбертовых пространств $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$, в пространстве сечений которого выбрано подпространство, элементы которого мы хотим объявить измеримыми.

Определение 1. *Измеримое гильбертово расслоение* (говорят также: *измеримое поле гильбертовых пространств*) над $(X, \mathscr{A})$ — это пара $\mathscr{H} = \big(\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F}\big)$, состоящая из семейства гильбертовых пространств $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ и векторного подпространства $\mathscr{F} \subset \prod_{\lambda\in X} H(\lambda)$, удовлетворяющего следующим условиям:

(1) для каждых $u, v \in \mathscr{F}$ функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), v(\lambda)\rangle$ измерима на X;

(2) если сечение $u \in \prod_{\lambda\in X} H(\lambda)$ таково, что функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), v(\lambda)\rangle$ измерима для любого $v \in \mathscr{F}$, то $u \in \mathscr{F}$;

(3) существует счетное семейство $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}$ такое, что $\overline{\operatorname{span}}\{u_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty = H(\lambda)$.

Элементы $\mathscr{F}$ называются *измеримыми сечениями* расслоения $\mathscr{H}$.

Замечание 1. Заметим, что из последнего условия следует, что все пространства $H(\lambda)$ сепарабельны. Это ограничение может на первый взгляд показаться довольно искусственным, но в дальнейшем мы увидим, что оно играет весьма существенную роль. Впрочем, на прошлой лекции нам уже пришлось один раз налагать условие сепарабельности — а именно, тогда, когда мы строили скалярную спектральную меру оператора. Теория кратности для операторов в несепарабельных пространствах также существует, но имеет заметно более сложный вид, и мы ею заниматься не будем.

Пример 1. Простейший пример измеримого гильбертова расслоения получится, если положить $H(\lambda) = \mathbb{C}$ для всех $\lambda \in X$ и взять в качестве $\mathscr{F}$ множество всех измеримых функций на X.

Пример 2 (постоянное расслоение). Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Будем говорить, что функция $u\colon X \to H$ *измерима*, если для любого $x \in H$ измерима функция $\lambda \mapsto \langle u(\lambda), x\rangle$. Положим $H(\lambda) = H$ для всех $\lambda \in X$, и возьмем в качестве $\mathscr{F}$ множество всех измеримых функций на X со значениями в H.

Упражнение 2. Проверьте выполнение аксиом (1)–(3).

Пример 3 (локально постоянное расслоение). Пусть X представлено в виде $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, где $X_n \in \mathscr{A}$. Для каждого n зафиксируем сепарабельное гильбертово пространство H_n и положим $H(\lambda) = H_n$ для каждого $\lambda \in X_n$. Пусть

$$\mathscr{F} = \Big\{ u \in \prod_{\lambda\in X} H(\lambda) : u|_{X_n} \colon X_n \to H_n \text{ измерима } \forall n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Упражнение 3. Проверьте выполнение аксиом (1)–(3).

Оказывается, других измеримых гильбертовых расслоений, кроме описанных в предыдущем примере, не бывает. Чтобы сформулировать это более строго, надо ввести понятие морфизма измеримых гильбертовых расслоений.

Определение 2. Пусть $\mathscr{H} = \big(\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F}\big)$ и $\mathscr{H}' = \big(\{H'(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F}'\big)$ — измеримые гильбертовы расслоения над $(X, \mathscr{A})$. *Морфизм* (или *измеримое поле операторов*) $T \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ — это семейство операторов $\{T(\lambda) \in \mathscr{B}(H(\lambda), H'(\lambda)) : \lambda \in X\}$ такое, что для любого $u \in \mathscr{F}$ сечение $Tu \in \prod_{\lambda\in X} H'(\lambda)$, определяемое равенством $(Tu)(\lambda) = T(\lambda)u(\lambda)$, принадлежит $\mathscr{F}'$.

Если μ — σ-аддитивная неотрицательная мера на $\mathscr{A}$, то морфизм $T \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ называется *μ-существенно ограниченным*, если функция $\lambda \mapsto \|T(\lambda)\|$ μ-существенно ограничена.

Морфизм $T \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ называется *унитарным изоморфизмом*, если $T(\lambda)$ — унитарный изоморфизм для всех $\lambda \in X$.

Пример 4 (диагональный морфизм). Пусть $f \colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. *Диагональный морфизм* $D_f \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ определяется формулой $D_f(\lambda) = f(\lambda)\mathbf{1}_{H(\lambda)}$ (убедитесь, что это на самом деле морфизм гильбертовых расслоений). Ясно, что D_f существенно ограничен тогда и только тогда, когда f существенно ограничена, и является унитарным изоморфизмом тогда и только тогда, когда $|f(\lambda)| = 1$ для всех $\lambda \in X$.

Определение 3. Измеримое гильбертово расслоение называется *тривиальным*, если оно унитарно изоморфно постоянному расслоению (см. пример 2).

В дальнейшем через $\overline{\mathbb{N}}$ мы будем обозначать «расширенное множество натуральных чисел» $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A})$. Для каждого $n \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : \dim H(\lambda) = n\}$. Тогда $X_n \in \mathscr{A}$, и ограничение $\mathscr{H}|_{X_n}$ тривиально. Как следствие, $\mathscr{H}$ изоморфно локально постоянному расслоению (см. пример 3). В частности, измеримое гильбертово расслоение постоянной размерности тривиально.*

Замечание 2 (для любителей топологии). С точки зрения топологии, формулировка теоремы выглядит несколько неожиданной: ведь не все же локально тривиальные векторные расслоения тривиальны! Но теория меры — наука гораздо более «мягкая», чем топология; например, отрезок и окружность, конечно, не гомеоморфны друг другу как топологические пространства, но как измеримые пространства они ничем друг от друга не отличаются. Примерно то же самое происходит и с расслоениями...

Доказательство. (Набросок). Выберем счетное семейство измеримых сечений $\{u_n\}$, удовлетворяющее условию (3) определения 1. Для каждого конечного подмножества $I \subset \mathbb{N}$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функции δ_I и Δ_n на X формулами

$$\delta_I(\lambda) = \left|\det\bigl(\langle u_i(\lambda), u_j(\lambda)\rangle\bigr)_{i,j\in I}\right|,$$
$$\Delta_n(\lambda) = \sup\{\delta_I(\lambda) : I \subset \mathbb{N},\ \mathrm{Card} I = n\}.$$

Ясно, что δ_I, а, следовательно, и Δ_n $\mathscr{A}$-измеримы. При этом из условия (3) определения 1 следует, что $\dim H(\lambda) < n$ в точности тогда, когда $\Delta_n(\lambda) = 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $Y_n = \{\lambda \in X : \Delta_n(\lambda) = 0\}$ принадлежит $\mathscr{A}$. Следовательно, множества $X_n = Y_{n+1} \setminus Y_n$, $X_0 = Y_1$ и $X_\infty = X \setminus \bigcup_{n=0}^\infty X_n$ также лежат в $\mathscr{A}$.

При доказательстве того, что $\mathscr{H}$ тривиально на каждом X_n, мы можем считать, что $X = X_n$.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение, причем $\dim H(\lambda) = n$ для всех $\lambda \in X$ (здесь $n \in \overline{\mathbb{N}}$). Тогда существует семейство измеримых сечений $\{e_i\}_{i=1}^n$ такое, что $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в $H(\lambda)$ для всех $\lambda \in X$.*

Упражнение 4. Докажите эту лемму.

Указание. Доказательство напоминает процесс ортогонализации Грама-Шмидта. А именно, возьмите семейство $\{u_i\}$ такое, как выше, и подправьте u_1: вначале добавьте к нему сумму вида $\sum_{i\geqslant 2} f_i u_i$ (где f_i — подходящие измеримые функции) так, чтобы полученное сечение u_1' нигде не обращалось в нуль, а затем положите $e_1 = u_1'/\|u_1'\|$. Далее замените каждое u_i (при $i \geqslant 2$) на $u_i' = u_i - \langle u_i, e_1\rangle e_1$; полученные сечения будут в каждой точке ортогональны e_1. Отбросьте тождественно нулевые сечения и проделайте с оставшимися ту же процедуру, что и с u_i-ыми; это даст e_2, и т.д. На выходе получится нужное семейство $\{e_i\}$.

Для завершения доказательства теоремы остается взять гильбертово пространство H_n' с ортонормированным базисом $\{e_i'\}_{i=1}^n$ и определить унитарный изоморфизм T_n из постоянного расслоения над X_n со слоем H_n' в $\mathscr{H}|_{X_n}$ формулой $T(\lambda)e_i' = e_i(\lambda)$. Наконец, пусть $\mathscr{H}'$ — локально постоянное расслоение, построенное по разбиению $\{X_n\}$ со слоем H_n' на каждом X_n. Тогда морфизм $T\colon \mathscr{H}' \to \mathscr{H}$, совпадающий с T_n на каждом X_n, является, как легко убедиться (убедитесь!), унитарным изоморфизмом. $\square$

В качестве следствия мы получаем следующий результат о единственности семейства измеримых сечений:

Упражнение 5. Пусть $\{H(\lambda) : \lambda \in X\}$ — семейство гильбертовых пространств, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ — семейства его сечений, удовлетворяющие условиям (1)–(3) определения 1. Тогда $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.

Теперь мы готовы определить, что такое прямой интеграл. Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A})$, $\mathscr{F}$ — пространство его измеримых сечений.

Определение 4. Положим по определению

$$\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}) = \{u \in \mathscr{F} : \text{функция } \lambda \mapsto \|u(\lambda)\|^2\ \mu\text{-интегрируема }\}.$$

Элементы $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ будем называть *квадратично интегрируемыми сечениями* расслоения $\mathscr{H}$.

Легко видеть, что $\mathscr{L}^2(X,\mathscr{H})$ — векторное подпространство в $\mathscr{F}$. Определим на нем полуторалинейную форму

$$\langle u,v\rangle = \int_X \langle u(\lambda),v(\lambda)\rangle\, d\mu(\lambda). \tag{4}$$

Определение 5. Факторпространство

$$\mathscr{L}^2(X,\mathscr{H})/\{u : u = 0\ \mu\text{-п.в.}\}$$

обозначается символом $\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ или $\Gamma^2(X,\mathscr{H})$ и называется *прямым интегралом* семейства $\{H(\lambda) : \lambda\in X\}$ по мере μ.

Замечание 3. Как и в случае обычных L^2-пространств, мы часто будем допускать определенную вольность в речи и обозначениях и называть элементы из $\Gamma^2(X,\mathscr{H})$ «сечениями» (хотя, строго говоря, речь при этом всегда будет идти о классах эквивалентности).

Формула (4), как нетрудно видеть, задает скалярное произведение на $\Gamma^2(X,\mathscr{H})$ и превращает его в предгильбертово пространство.

Упражнение 6. $\Gamma^2(X,\mathscr{H})$ — гильбертово пространство.

Пример 5. Пусть $X=\{1,\ldots,n\}$, где $n\in\overline{\mathbb{N}}$, и пусть $\mu(\{k\})=1$ для всех k («считающая» мера). Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \dot{\bigoplus_{1\leqslant k\leqslant n}} H(k).$$

Пример 6. Пусть $\mathscr{H}$ — постоянное расслоение со слоем $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong L^2(X,\mu).$$

Пример 7. Пусть $\mathscr{H}$ — постоянное расслоение со слоем H. Обозначим через $L^2_H(X,\mu)$ множество классов эквивалентности μ-измеримых функций $u\colon X\to H$, для которых функция $\lambda\mapsto \|u(\lambda)\|^2$ интегрируема, и введем там скалярное произведение формулой (4). Тогда, как нетрудно видеть,

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong L^2_H(X,\mu).$$

Пример 8. Пусть X представлено в виде $X=\bigsqcup_n X_n$, где $X_n\in\mathscr{A}$ для всех n, и пусть $H(\lambda)=H_n$ для всех $\lambda\in X_n$ и всех $n\in\mathbb{N}$ (см. пример 3). Тогда

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \dot{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} L^2_{H_n}(X_n,\mu).$$

Следующее предложение часто принимают в качестве *определения* прямого интеграла.

Теорема 2 (координатное описание прямого интеграла). *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Для каждого $n \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : \dim H(\lambda) = n\}$. Пусть H_∞ — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $H_0 = \{0\}$. Тогда*

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \bigl\{u \in L^2_{H_\infty}(X, \mu) : u(\lambda) \in H_n \text{ для п.в. } \lambda \in X_n,\ \forall n \in \overline{\mathbb{N}}\bigr\}.$$

Доказательство. Достаточно объединить теорему 1 и пример 8. □

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное понятие.

Определение 6. Мы будем называть измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H}$ над $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *приведенным*, если $\mu(\{\lambda \in X : H(\lambda) = 0\}) = 0$.

Каждое гильбертово расслоение можно сделать приведенным, не изменив его прямой интеграл. Для этого положим $X_+ = \{\lambda \in X : H(\lambda) \neq 0\}$, и введем новую меру μ' на X по формуле $\mu'(Y) = \mu(Y \cap X_+)$ для всех $Y \in \mathscr{A}$.

Упражнение 7. Расслоение $\mathscr{H}$ является приведенным над $(X, \mathscr{A}, \mu')$, и

$$\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \cong \int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu'(\lambda).$$

Итак, каждому измеримому гильбертову расслоению поставлено в соответствие гильбертово пространство — его прямой интеграл. Как и следовало ожидать, эта конструкция естественна:

Предложение 1. *Пусть $T\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ — существенно ограниченный морфизм измеримых гильбертовых расслоений над (X, μ). Тогда для любого $u \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ сечение Tu лежит в $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}')$. Как следствие, определен оператор $\bar{T}\colon \Gamma^2(X, \mathscr{H}) \to \Gamma^2(X, \mathscr{H}')$, переводящий класс эквивалентности сечения u в класс эквивалентности Tu. Оператор $\bar{T}$ ограничен, и $\|\bar{T}\| \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{\lambda\in X} \|T(\lambda)\|$.*

Доказательство. Положим $C = \operatorname{ess\,sup}_{\lambda\in X} \|T(\lambda)\|$. Тогда для любого $u \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ мы имеем $\|T(\lambda)u(\lambda)\|^2 \leqslant C^2\|u(\lambda)\|^2$ для почти всех $\lambda \in X$, так что $Tu \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H}')$. Интегрируя последнее неравенство, получаем $\|Tu\|^2 \leqslant C^2\|u\|^2$, как и требовалось. □

Упражнение 8. Покажите, что на самом деле $\|\bar{T}\| = \operatorname{ess\,sup}_{\lambda\in X} \|T(\lambda)\|$.

Таким образом, мы получаем функтор из категории измеримых гильбертовых расслоений и существенно ограниченных морфизмов в категорию гильбертовых пространств и ограниченных операторов.

Определение 7. Оператор $\bar{T}$, построенный в предложении 1, называется *прямым интегралом* семейства операторов $T = \{T(\lambda) : \lambda \in X\}$ и обозначается $\int_X^{\oplus} T(\lambda)\, d\mu(\lambda)$. Операторы из $\Gamma(X, \mathscr{H})$ в $\Gamma(X, \mathscr{H}')$, имеющие указанный вид, называются *разложимыми* (по фон Нойманну).

Пример 9. В ситуации, описанной в примере 5, мы имеем $\bar{T} = \dot{\bigoplus}_{1\leqslant k\leqslant n} T(k)$. Таким образом, в «дискретном» случае, когда (X,μ) — это счетное или конечное множество со »считающей» мерой, прямой интеграл — это то же самое, что гильбертова прямая сумма (см. прошлую лекцию).

Следующий пример, как мы вскоре увидим, является в определенном смысле «модельным».

Пример 10. Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над (X,μ). Каждая существенно ограниченная измеримая функция $f\colon X\to\mathbb{C}$ задает оператор

$$\bar{D}_f = \int_X^{\oplus} f(\lambda)\mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda),$$

действующий в пространстве $H = \int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$. Этот оператор ассоциирован с диагональным морфизмом D_f (см. пример 4). Операторы в H, представимые в указанном виде, называются *диагонализируемыми.*

Пример 11. Если в предыдущем примере взять в качестве (X,μ) множество $\mathbb{N}$ со считающей мерой, и положить $H(n)=\mathbb{C}$ для всех n, то получится наш старый знакомый — диагональный оператор в ℓ^2 (см. пример 3 из лекции 3). Если же (X,μ) произвольно, а расслоение $\mathscr{H}$ — постоянное со слоем $\mathbb{C}$, то $\bar{D}_f$ — это оператор умножения $M_f\colon L^2(X,\mu)\to L^2(X,\mu)$ (см. пример 4 из лекции 3).

Легко видеть, что оператор $\bar{D}_f$ зависит только от класса μ-эквивалентности функции f, т.е. от соответствующего элемента $L^\infty(X,\mu)$. Кроме того, диагонализируемые операторы обладают следующими очевидными свойствами:

1) $\bar{D}_1 = \mathbf{1}$;

2) $\bar{D}_{\alpha f+\beta g} = \alpha\bar{D}_f + \beta\bar{D}_g \quad (f,g\in L^\infty(X,\mu),\ \alpha,\beta\in\mathbb{C})$;

3) $\bar{D}_{fg} = \bar{D}_f\bar{D}_g \quad (f,g\in L^\infty(X,\mu))$;

4) $\bar{D}_{\bar{f}} = \bar{D}_f^* \quad (f\in L^\infty(X,\mu))$.

Иными словами,

Предложение 2. *Отображение*

$$L^\infty(X,\mu)\to\mathscr{B}\Big(\textstyle\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)\Big), \quad f\mapsto \bar{D}_f, \tag{5}$$

является унитальным $*$-гомоморфизмом. Таким образом, гильбертово пространство $\int_X^{\oplus} H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ становится левым унитальным гильбертовым $L^\infty(X,\mu)$-модулем.

Гильбертов модуль, описанный в предыдущем предложении, является в определенном смысле «модельным примером» гильбертова модуля над алгеброй $L^\infty(X,\mu)$. Мы не будем строго формулировать и доказывать соответствующее утверждение, поскольку алгебра $L^\infty(X,\mu)$ играет для нас скорее вспомогательную роль. Напомним, что основной алгеброй, представления которой (=гильбертовы модули над которой) нас интересуют, является алгебра $C(X)$ непрерывных функций на компакте X (см. теорему 4 из лекции 11).

Если X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а μ — регулярная положительная борелевская мера на X, то алгебра $C(X)$ канонически отображается в $L^\infty(X,\mu)$, так что каждый гильбертов $L^\infty(X,\mu)$-модуль может рассматриваться и как гильбертов $C(X)$-модуль (см. прошлую лекцию). Поэтому из предыдущего предложения вытекает

Следствие 1. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, μ — регулярная положительная борелевская мера на X, $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ — измеримое гильбертово расслоение над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$. Тогда отображение (5) превращает гильбертово пространство $\int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ в левый унитальный гильбертов $C(X)$-модуль.*

Упражнение 9. Если расслоение $\mathscr{H}$ — приведенное, то μ является скалярной спектральной мерой для $\int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$.

Это и есть та самая «геометрическая модель» гильбертова $C(X)$-модуля, о которой упоминалось в начале лекции. Наша следующая цель — показать, что любой унитальный сепарабельный гильбертов $C(X)$-модуль представим в таком виде.

Разложение гильбертова $C(X)$-модуля в прямой интеграл.

Теорема 3. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, H — унитальный сепарабельный гильбертов $C(X)$-модуль, $\mu \in M(X)$ — его скалярная спектральная мера. Тогда существует приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ такое, что*

$$H \cong \int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda) \qquad \text{в} \quad C(X)\text{-}\mathrm{H}\mathbf{mod}_1 .$$

Прежде чем доказывать теорему, договоримся о терминологии. Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над произвольным пространством с мерой $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $H = \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ — его прямой интеграл, $M \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ — некоторое множество квадратично интегрируемых сечений. Рассмотрим подмодуль

$$H_M = \Big\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_i \ : \ a_i \in C(X),\ u_i \in M,\ n \in \mathbb{N} \Big\} \subset H;$$

ясно, что это наименьший подмодуль в H, содержащий классы эквивалентности всех сечений из M. Мы будем говорить, что H_M *порожден* семейством сечений M.

Лемма 2. *Пусть $M = \{u_i : i \in I\} \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ — конечное или счетное семейство сечений, $H_M \subset \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ — порожденный этим семейством подмодуль. Предположим, что для п.в. $\lambda \in X$ подпространство $\operatorname{span}\{u_i(\lambda) : i \in I\}$ плотно в $H(\lambda)$. Тогда H_M плотен в $\Gamma^2(X, \mathscr{H})$.*

Доказательство. Пусть $v \in H_M^\perp$. Тогда для любых $i \in I$ и $f \in C(X)$ мы имеем

$$0 = \langle f u_i, v\rangle = \int_X f(\lambda)\langle u_i(\lambda), v(\lambda)\rangle\, d\mu(\lambda). \tag{6}$$

Определим функцию $\rho_i\colon X \to \mathbb{C}$ и комплексную борелевскую меру ν_i на X формулами $\rho_i(\lambda) = \langle u_i(\lambda), v(\lambda)\rangle$ и $\nu_i = \rho_i \cdot \mu$. Поскольку μ регулярна, а ν_i абсолютно непрерывна относительно нее, то и ν_i регулярна (см. теорему 5 (iii) с прошлой лекции). Продолжая цепочку равенств (6), мы видим, что $\int_X f(\lambda)\, d\nu_i(\lambda) = 0$ для любой $f \in C(X)$. Следовательно, $\nu_i = 0$, т.е. $\rho_i = 0$ μ-п.в. Это, в свою очередь, означает, что $u_i(\lambda) \perp v(\lambda)$ μ-п.в. Поскольку это так для любого $i \in I$, а множество I не более чем счетно, мы заключаем, что $v = 0$ μ-п.в., т.е. что $H_M^\perp = 0$, как и требовалось. □

Доказательство теоремы. Представим H в виде гильбертовой суммы циклических модулей: $H = \bigoplus_n H_n$. Пусть $x_n \in H_n$ — циклический вектор, $\mu_n = \mu_{x_n}$ — соответствующая мера. Поскольку $\mu_n \ll \mu$, существует борелевская μ-интегрируемая функция $\rho_n \geqslant 0$ такая, что $\mu_n = \rho_n \cdot \mu$. Положим $X_n' = \{\lambda \in X : \rho_n(\lambda) \neq 0\}$, и введем *функцию кратности* $m\colon X \to \overline{\mathbb{N}}$, полагая $m(\lambda) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{N} : \lambda \in X_n'\}$. Наконец, для каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_p = \{\lambda \in X : m(\lambda) = p\}$. Тогда, очевидно, $X = \bigsqcup_{p\in\overline{\mathbb{N}}} X_p$.

Упражнение 10. Докажите, что множества X_p — борелевские.

Теперь построим искомое гильбертово расслоение. Зафиксируем бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство K_∞ с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $K_n = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$; пусть также $K_0 = 0$. Для каждого $\lambda \in X$ положим $H(\lambda) = K_{m(\lambda)}$, и обозначим через $\mathscr{H}$ соответствующее локально постоянное гильбертово расслоение на X (см. пример 3); таким образом, на каждом X_p ($p \in \overline{\mathbb{N}}$) расслоение $\mathscr{H}$ постоянно и имеет слой K_p. Отметим, что $\mathscr{H}$ — приведенное расслоение; в самом деле, из равенства $\mu_n(X_0) = 0$, справедливого для всех $n \in \mathbb{N}$, легко следует (объясните, как), что $\mu(X_0) = 0$. Рассмотрим прямой интеграл

$$K = \int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \bigl\{u \in L^2_{K_\infty}(X, \mu) : u(\lambda) \in K_p \text{ для п.в. } \lambda \in X_p,\ \forall p \in \overline{\mathbb{N}}\bigr\}.$$

(см. теорему 2). Наша задача — построить изометрический изоморфизм H и K как $C(X)$-модулей.

Для того чтобы определить морфизм из H в K, достаточно задать его на каждом прямом слагаемом H_n; далее, из цикличности H_n следует, что любой морфизм из H_n однозначно определен своим значением на циклическом векторе x_n. Таким образом, для каждого n мы должны указать некий вектор $u_n \in K$, а потом отправить в него x_n. При этом мы должны обеспечить попарную ортогональность u_n-ых. Сделать это можно следующим образом.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $\lambda \in X_n'$ положим

$$q(n, \lambda) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n,\ \lambda \in X_k'\}.$$

Очевидно, $q(n, \lambda) \leqslant m(\lambda)$. Определим функцию $u_n \in L^2_{K_\infty}(X, \mu)$ формулой

$$u_n(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\rho_n(\lambda)}\, e_{q(n,\lambda)}, & \lambda \in X_n' \\ 0, & \lambda \notin X_n' \end{cases}$$

Из неравенства $q(n,\lambda) \leqslant m(\lambda) = \dim H(\lambda)$ следует, что $u_n(\lambda) \in H(\lambda)$ для всех $\lambda \in X$, т.е. u_n (точнее, ее класс эквивалентности) принадлежит K.

Лемма 3. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный морфизм гильбертовых $C(X)$-модулей $\varphi_n \colon H_n \to K$ такой, что $\varphi(x_n) = u_n$. Этот морфизм изометричен.*

Доказательство. Единственность φ_n следует из того, что x_n — циклический вектор. Для доказательства существования заметим, что для любой $f \in C(X)$ справедливы равенства

$$\|f \cdot x_n\|^2_{H_n} = \int_X |f(\lambda)|^2 \, d\mu_n(\lambda) = \int_X |f(\lambda)|^2 \rho_n(\lambda) \, d\mu(\lambda) =$$
$$= \int_X |f(\lambda)|^2 \|u_n(\lambda)\|^2 \, d\mu(\lambda) = \int_X \big\|(f \cdot u_n)(\lambda)\big\|^2_{K(\lambda)} d\mu(\lambda) = \|f \cdot u_n\|^2_K.$$

Отсюда следует, что отображение $C(X)x_n \to K$, $f \cdot x_n \mapsto f \cdot u_n$ корректно определено и изометрично. Очевидно, оно также является морфизмом $C(X)$-модулей. Поскольку $C(X)x_n$ плотно в H_n, построенный морфизм однозначно продолжается на весь H_n. Дальше ясно. □

Лемма 4. $\operatorname{Im}\varphi_i \perp \operatorname{Im}\varphi_j$ *при $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть для определенности $i < j$. Нам достаточно доказать (объясните, почему), что $u_i(\lambda) \perp u_j(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in X$. Если $\lambda \in X'_i \cap X'_j$, то из $i < j$ следует, что $q(i,\lambda) < q(j,\lambda)$, и, значит, $u_i(\lambda) \perp u_j(\lambda)$. А для всех остальных λ мы имеем либо $u_i(\lambda) = 0$, либо $u_j(\lambda) = 0$. Тем самым лемма доказана. □

Лемма 5. *Подмодуль $\sum_j \operatorname{Im}\varphi_j$ плотен в K.*

Доказательство. Указанный подмодуль порожден семейством сечений $\{u_i\}$. Поэтому, с учетом леммы 2, нам достаточно проверить, что для любого $\lambda \in X$ подпространство $K_\lambda = \operatorname{span}\{u_i(\lambda) : i \in \mathbb{N}\}$ плотно в $H(\lambda)$. Возьмем то единственное $p \in \overline{\mathbb{N}}$, для которого $\lambda \in X_p$; пусть для определенности $p < \infty$. Тогда существует единственный набор натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ такой, что $\lambda \in X'_{n_1} \cap \ldots \cap X'_{n_p}$, но $\lambda \notin X'_k$ при $k \notin \{n_1, \ldots, n_p\}$. Из определения u_i-ых следует, что

$$u_{n_1}(\lambda) = \rho_{n_1}(\lambda) e_1,\ u_{n_2}(\lambda) = \rho_{n_2}(\lambda) e_2, \ldots, u_{n_p}(\lambda) = \rho_{n_p}(\lambda) e_p,$$

и, кроме того, $\rho_{n_j}(\lambda) \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, p$. Отсюда следует, что $e_1, \ldots, e_p \in K_\lambda$, т.е. $K_\lambda = H(\lambda)$. Если же $p = \infty$, то, применяя аналогичные рассуждения (с той лишь разницей, что набор $n_1 < n_2 < \ldots$ будет бесконечным), мы видим, что $e_n \in K_\lambda$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е. K_λ плотно в $H(\lambda)$. Тем самым лемма доказана. □

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть тот единственный морфизм $\varphi \colon \bigoplus_n H_n \to K$, у которого $\varphi|_{H_n} = \varphi_n$ для всех n. Из трех предыдущих лемм следует, что φ изометричен и имеет плотный образ. Следовательно, он единственным образом продолжается до изометрического изоморфизма $\bar{\varphi} \colon \bigoplus_n H_n = H \to K$. Теорема доказана. □

В терминах операторов доказанная теорема приобретает такой вид:

Теорема 4. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, μ — его скалярная спектральная мера. Тогда существует измеримое приведенное гильбертово расслоение $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}, \mathscr{F})$ над $(\sigma(T), \mathscr{B}or(\sigma(T)), \mu)$ такое, что T унитарно эквивалентен оператору $\int_X^\oplus \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda)$, действующему в $\int_X^\oplus H(\lambda)\, d\mu(\lambda)$.*

Дополнение: теорема о классификации[1].

Как уже упоминалось в начале лекции, теория кратности позволяет дать полную классификацию нормальных операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах с точностью до унитарной эквивалентности. Для этого нам понадобится утверждение, обратное к лемме 2.

Лемма 6. *Пусть $\mathscr{H}$ — измеримое гильбертово расслоение над пространством с мерой $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $H = \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ — его прямой интеграл, $M \subset \mathscr{L}^2(X, \mathscr{H})$ — некоторое множество квадратично интегрируемых сечений, $H_M \subset H$ — подмодуль, порожденный M. Предположим, что H_M плотен в H. Тогда подпространство* $\operatorname{span}\{u(\lambda) : u \in M\}$ *плотно в $H(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in X$.*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ — счетное семейство измеримых сечений, удовлетворяющее условию (3) определения 1. Заменяя при необходимости каждое u_n на $u_n'(\lambda) = u_n(\lambda)/\|u_n(\lambda)\|$ (для тех λ, где $u_n(\lambda) \neq 0$), мы можем считать, что u_n квадратично интегрируемы. Для каждого $\lambda \in X$ положим $H_M^\lambda = \overline{\operatorname{span}}\{u(\lambda) : u \in M\}$, и предположим, что заключение леммы неверно, т.е. что $H_M^\lambda \neq H(\lambda)$ на множестве положительной меры. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $X_n = \{\lambda \in X : u_n(\lambda) \notin H_M^\lambda\}$. Из сделанного предположения следует, что $\mu(X_n) > 0$ для некоторого n. Зафиксируем такое n и рассмотрим функцию $d_n \colon X \to [0, \infty)$, $d_n(\lambda) = \rho\big(u_n(\lambda), H_M^\lambda\big)$. Мы имеем $d_n(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \in X_n$; следовательно, существуют $\varepsilon > 0$ и множество $Y \subset X_n$ такие, что $\mu(Y) > 0$ и $d_n(\lambda) > \varepsilon$ для любого $\lambda \in Y$. Тогда для любого $v \in H_M$ справедлива оценка

$$\|v - u_n\|^2 = \int_X \|v(\lambda) - u_n(\lambda)\|^2\, d\mu(\lambda) \geqslant \int_Y d_n^2(\lambda)\, d\mu(\lambda) \geqslant \varepsilon^2 \mu(Y).$$

Следовательно, $u_n \notin \overline{H_M}$, а это противоречит условию. Тем самым лемма доказана. □

Теорема 5. *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu, \mu' \in M(X)$ — неотрицательные меры, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — приведенные измеримые гильбертовы расслоения над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ и $(X, \mathscr{B}or(X), \mu')$ соответственно, $H = \Gamma(X, \mathscr{H})$ и $H' = \Gamma(X, \mathscr{H}')$ — их прямые интегралы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $H \cong H'$ *в* $C(X)$-H$\mathbf{mod}_1$;
(ii) $\mu \sim \mu'$, *и* $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ μ-*п.в.*

[1] На лекции эта теорема была сформулирована без доказательства из-за отсутствия времени.

Доказательство. (ii)$\Longrightarrow$(i). Представим H и H' так, как это указано в теореме 2, и положим $\rho = \frac{d\mu}{d\mu'}$ и $\rho' = \frac{d\mu'}{d\mu}$. Легко убедиться (убедитесь), что $\rho\rho' = 1$ п.в. Далее, как и в доказательстве леммы 3, проверяется, что оператор $T\colon H \to H'$, действующий по формуле $(Tu)(\lambda) = \sqrt{\rho(\lambda)}u(\lambda)$, корректно определен, изометричен и является морфизмом гильбертовых $C(X)$-модулей. С другой стороны, оператор $S\colon H' \to H$, действующий по формуле $(Su)(\lambda) = \sqrt{\rho'(\lambda)}u(\lambda)$, является, очевидно, обратным к T. Следовательно, T — изоморфизм в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Эквивалентность мер μ и μ' следует из упражнения 9.

Положим $m(\lambda) = \dim H(\lambda)$, $m'(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ и $Z = \{\lambda \in X : m(\lambda) \neq m'(\lambda)\}$. Допустим, что $\mu(Z) > 0$. Тогда существует борелевское подмножество $Y \subset Z$ с $\mu(Y) > 0$, на котором функции m и m' постоянны. Из того, что H и H' изоморфны в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$, очевидным образом следует, что их замкнутые подмодули $\chi_Y H$ и $\chi_Y H'$ изоморфны в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$ или, что эквивалентно, в $C(Y)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$. Поэтому в дальнейшем мы, не ограничивая общности, можем считать, что $Y = X$.

Пусть для определенности $m(\lambda) = p < q = m'(\lambda)$ для любого $\lambda \in X$, и пусть $\varphi\colon H \to H'$ — изоморфизм в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$. С учетом теоремы 2, мы можем считать, что $H = L^2_{H_p}(X,\mu)$ и $H' = L^2_{H_q}(X,\mu')$, где H_p и H_q — гильбертовы пространства размерностей p и q соответственно. Возьмем ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_p$ в H_p, и для каждого $k = 1,\ldots,p$ рассмотрим постоянную функцию $\bar e_k\colon X \to H_p$, $\bar e_k(\lambda) = e_k$. Из леммы 2 следует, что подмодуль в H, порожденный $\bar e_1,\ldots,\bar e_p$, плотен в H. Для каждого $k = 1,\ldots,p$ выберем функцию $v_k\colon X \to H_q$, класс эквивалентности которой есть $\varphi(\bar e_k)$. Из того, что φ — изоморфизм, легко следует, что $v_1,\ldots,v_p$ порождают плотный подмодуль в H'. Но тогда из леммы 6 следует, что $\operatorname{span}\{v_1(\lambda),\ldots,v_p(\lambda)\} = H_q$ для п.в. $\lambda \in X$, а это невозможно ввиду условия $p < q$. Тем самым теорема доказана. $\square$

Объединяя теоремы 3 и 5, мы получаем следующий результат, который, по-видимому, представляет собой наиболее полную (по сравнению с ранее обсуждавшимися) формулировку спектральной теоремы.

Теорема 6 (спектральная теорема). *Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Тогда:*

I. *Для любого унитального сепарабельного гильбертова $C(X)$-модуля H существуют неотрицательная мера $\mu \in M(X)$ и приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H}$ над $(X, \mathscr{B}or(X), \mu)$ такие, что $H \cong \Gamma^2(X,\mathscr{H})$ в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$. При этом μ является скалярной спектральной мерой для H.*

II. *Пусть H и H' — унитальные сепарабельные гильбертовы $C(X)$-модули, μ и μ' — соответствующие меры, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — соответствующие приведенные измеримые гильбертовы расслоения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$H \cong H'$ в $C(X)$-$\mathrm{H}\mathbf{mod}_1$;*
(ii) *$\mu \sim \mu'$, и $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ μ-п.в.*

Теорема 6 позволяет дать следующее определение.

Определение 8. Пусть H — сепарабельный унитальный гильбертов $C(X)$-модуль, μ — его скалярная спектральная мера, $\mathscr{H} = (\{H(\lambda) : \lambda \in X\}, \mathscr{F})$ — приведенное измеримое гильбертово расслоение, такое, что $H \cong \Gamma^2(X, \mathscr{H})$ (см. п. 1 теоремы 6). Борелевская функция $m_H \colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ называется *функцией кратности* модуля H, если $m_H(\lambda) = \dim H(\lambda)$ μ-п.в. Функцией кратности m_T нормального оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H назовем функцию кратности H как гильбертова $C(\sigma(T))$-модуля.

Из теоремы 6 следует, что функция кратности корректно определена, и ее класс μ-эквивалентности однозначно определен классом изоморфизма модуля H.

Таким образом, теорема 6 дает полную классификацию сепарабельных унитальных гильбертовых $C(X)$-модулей с точностью до изометрического изоморфизма. При этом фактически можно обойтись без использования измеримых расслоений. Чтобы увидеть это более отчетливо, введем некоторые обозначения. Если H — гильбертово пространство, $T \in \mathscr{B}(H)$ — ограниченный оператор, то для каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ через pH (соответственно, pT) будет обозначаться гильбертова прямая сумма p экземпляров пространства H (соответственно, оператора T).

Упражнение 11. Пусть $p \in \overline{\mathbb{N}}$, H_p — сепарабельное гильбертово пространство размерности p, $\mu \in M(X)$ — неотрицательная мера. Покажите, что гильбертовы $C(X)$-модули $L^2_{H_p}(X, \mu)$ и $pL^2(X, \mu)$ изометрически изоморфны.

Теперь рассмотрим множество всех пар (μ, m), где $\mu \in M(X)$ — неотрицательная мера и $m \colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ — борелевская функция. Пару (μ, m) будем называть *приведенной*, если $m(\lambda) > 0$ μ-п.в. Две приведенные пары (μ, m) и (μ', m') будем называть *эквивалентными*, если $\mu \sim \mu'$ и $m(\lambda) = m'(\lambda)$ μ-п.в. Для заданной борелевской функции $m \colon X \to \overline{\mathbb{N}}$ и каждого $p \in \overline{\mathbb{N}}$ положим $X_p^m = \{\lambda \in X : m(\lambda) = p\}$. Наконец, определим меру $\mu_p \in M(X)$ формулой $\mu_p(B) = \mu(B \cap X_p)$.

Теорема 7 (о классификации). *Существуют биекции множеств*

$$\left\{ \begin{matrix} \text{классы изометрического изоморфизма} \\ \text{сепарабельных унитальных} \\ \text{гильбертовых } C(X)\text{-модулей} \end{matrix} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{matrix} \text{классы эквивалентности} \\ \text{приведенных пар } (\mu, m)\text{, где} \\ \mu \in M(X) \text{ — неотрицательная мера,} \\ m \colon X \to \overline{\mathbb{N}} \text{ — борелевская функция} \end{matrix} \right\}$$

Отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому модулю его скалярную спектральную меру и функцию кратности. Отображение, действующее справа налево, сопоставляет паре (μ, m) гильбертов $C(X)$-модуль

$$\dot{\bigoplus_{p \in \overline{\mathbb{N}}}} pL^2(X, \mu_p) \cong \dot{\bigoplus_{p \in \overline{\mathbb{N}}}} pL^2(X_p^m, \mu).$$

Доказательство. Достаточно объединить теорему 6, теорему 2 (см. также пример 8) и упражнение 11. $\square$

Для полноты картины сформулируем аналоги теорем 6 и 7 в терминах операторов. В дальнейшем символ $\cong$ в применении к операторам будет обозначать унитарную эквивалентность.

Теорема 8 (спектральная теорема). *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда:*

I. *Для любого нормального оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ существуют неотрицательная мера $\mu \in M(\sigma(T))$ и приведенное измеримое гильбертово расслоение $\mathscr{H} = \{H(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ над $\big(\sigma(T), \mathscr{B}or(\sigma(T)), \mu\big)$ такие, что*

$$T \cong \int_{\sigma(T)}^{\oplus} \lambda \mathbf{1}_{H(\lambda)}\, d\mu(\lambda).$$

При этом μ является скалярной спектральной мерой для T.

II. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ и $T' \in \mathscr{B}(H')$ — нормальные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах H и H' соответственно, μ и μ' — их скалярные спектральные меры, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — соответствующие приведенные измеримые гильбертовы расслоения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *T и T' унитарно эквивалентны;*
(ii) *$\sigma(T) = \sigma(T')$, $\mu \sim \mu'$, и $\dim H(\lambda) = \dim H'(\lambda)$ μ-п.в.*

Таким образом, если μ_T — скалярная спектральная мера оператора T, а m_T — его функция кратности, то тройка $(\sigma(T), \mu_T, m_T)$ является полным набором унитарных инвариантов оператора T. Это и есть обещанное обобщение классической теоремы из линейной алгебры (3) на бесконечномерный случай. Соответствующая классификационная теорема для операторов выглядит следующим образом:

Теорема 9 (о классификации). *Существуют биекции множеств*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{классы унитарной эквивалентности} \\ \textit{нормальных операторов} \\ \textit{в сепарабельных гильбертовых} \\ \textit{пространствах} \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \textit{тройки вида } (K, \mu, m)\textit{:} \\ K \subset \mathbb{C} \textit{ — компакт,} \\ (\mu, m) \textit{ — класс эквивалентности} \\ \textit{приведенной пары } (\mu, m)\textit{, где} \\ \mu \in M(K) \textit{ — неотрицательная мера,} \\ \textit{такая, что } \operatorname{supp}\mu = K, \\ m \colon K \to \overline{\mathbb{N}} \textit{ — борелевская функция} \end{array} \right\}$$

Отображение, действующее слева направо, сопоставляет каждому оператору его спектр, скалярную спектральную меру и функцию кратности. Отображение, действующее справа налево, сопоставляет тройке (K, μ, m) оператор $\dot{\bigoplus}_{p\in\overline{\mathbb{N}}} pM_t^{\mu_p}$. Здесь через $M_t^{\mu_p}$ обозначен оператор в гильбертовом пространстве $L^2(K, \mu_p) \cong L^2(K_p^m, \mu)$, действующий по формуле $f \mapsto (z \mapsto zf(z))$.

Доказательство. Следует из теорем 7 и 8 и упражнения 17 с предыдущей лекции. $\square$

Замечание 4. Представление оператора T в виде $\dot{\bigoplus}_{p\in\overline{\mathbb{N}}} pM_t^{\mu_p}$, указанное в последней теореме — это и есть то «упорядоченное разложение» оператора в сумму операторов умножения, которое упоминалось на прошлой лекции (см. замечание 3).

Чтобы лучше понять, как «работает» теорема о классификации и какая от нее польза, сделайте следующие упражнения.

Упражнение 12. Для следующих операторов $S \in \mathscr{B}(H)$ и $T \in \mathscr{B}(K)$ выясните, являются ли они унитарно эквивалентными. В тех случаях, когда это так, постройте унитарную эквивалентность в явном виде.
1. $H = K = L^2[0,1]$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = t^2 f(t)$.
2. $H = L^2[0,1]$, $K = L^2[-1,1]$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = t^2 f(t)$.
3. $H = L^2[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $K = L^2(\mathbb{R})$, $(Sf)(t) = tf(t)$, $(Tf)(t) = \operatorname{arctg} t \cdot f(t)$.

Упражнение 13. Найдите скалярную спектральную меру и функцию кратности диагонального оператора в ℓ^2.

Упражнение 14. Найдите скалярную спектральную меру и функцию кратности операторов сдвига в $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$.

Упражнение 15. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, m — функция кратности. Докажите, что T является $*$-циклическим тогда и только тогда, когда $m = 1$ μ-п.в.

Кстати, полезно сопоставить результат предыдущих трех упражнений с упражнениями 12 и 13 из лекции 12; см. также замечание 4 из той же лекции.

Упражнение 16. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, μ — его скалярная спектральная мера, m — функция кратности. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1. $m = \infty$ μ-п.в.;
2. $T \cong T \oplus T$;
3. $T \cong S \oplus S \oplus S \oplus \ldots$ для некоторого $*$-циклического $S \in \mathscr{B}(H')$.

Упражнение 17. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$ — неотрицательные меры, которые *взаимно сингулярны*, т.е. существует разбиение $X = X_1 \sqcup X_2$ пространства X на два борелевских подмножества такое, что $\mu_1(X_2) = 0$ и $\mu_2(X_1) = 0$. Рассмотрим гильбертовы $C(X)$-модули $H_i = L^2(X, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$. Опишите все морфизмы из H_1 в H_2.

Иногда унитарно эквивалентные операторы выглядят на первый взгляд совсем непохожими:

Упражнение 18*. Пусть $I = [0,1] \times [0,1]$ — квадрат с мерой Лебега, $H = L^2(I)$, $K = L^2(\mathbb{R})$. Рассмотрим операторы $S \in \mathscr{B}(H)$ и $T \in \mathscr{B}(K)$, действующие по формулам $(Sf)(x,y) = xy\, f(x,y)$ и $(Tf)(x) = \frac{1}{2}(\sin x + 1)\, f(x)$. Докажите, что S и T унитарно эквивалентны.

Замечание 5. Из предыдущих упражнений напрашивается такой вывод: функция кратности оператора умножения $M_f \in \mathscr{B}(L^2(X,\mu))$ на существенно ограниченную измеримую функцию $f \colon X \to \mathbb{C}$ сопоставляет каждому $\lambda \in \sigma(M_f)$ число точек в прообразе $f^{-1}(\lambda)$. Строго говоря, это не совсем так: нужно брать не прообраз, а так называемый *существенный прообраз.* О том, что это такое, можно прочитать в статье M. Abrahamse “Multiplication operators” (Lecture Notes in Math. 693 (1978), 17–36).