Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 2.
Примеры банаховых алгебр.

На прошлой лекции было введено понятие банаховой алгебры. Прежде чем приступать к их изучению, введем одно удобное алгебраическое понятие.

Определение 1. Пусть A — унитальная алгебра, а $B \subset A$ — подалгебра, содержащая единицу A. Тогда B называется *наполненной*, если каждый элемент B, обратимый в A, обратим и в B.

Предложение 1. *Пусть A — унитальная алгебра, B — ее наполненная подалгебра. Тогда $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$ для любого $b \in B$.*

Например, если Ω — топологическое пространство, то $C(\Omega)$ — наполненная подалгебра в $F(\Omega)$. С другой стороны, для любого бесконечного множества S подалгебра $\ell^\infty(S) \subset F(S)$ наполненной не является (см. прошлую лекцию).

Посмотрим теперь на несколько основных примеров банаховых алгебр, с которыми нам предстоит работать.

Пример 1. Основной для нашего курса пример — это алгебра $\mathscr{B}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E. Ввиду теоремы Банаха об обратном операторе, $\mathscr{B}(E)$ — наполненная подалгебра в $\mathscr{L}(E)$.

Пример 2. Алгебра $\ell^\infty(X)$, где X — произвольное множество, является банаховой относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Пример 3. Пусть Ω — компактное топологическое пространство. Тогда алгебра непрерывных функций $C(\Omega)$ — замкнутая подалгебра в $\ell^\infty(\Omega)$, и, как следствие, банахова алгебра. Отметим, что $C(\Omega)$ — наполненная подалгебра в $\ell^\infty(\Omega)$.

Пример 4. Пусть $C^n[a,b]$ — алгебра n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$. Она наделяется нормой $\|f\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$, задающей равномерную сходимость со всеми (вплоть до n-ой) производными. Если немного «подправить» норму, то $C^n[a,b]$ становится банаховой алгеброй:

Упражнение 1. 1) Докажите полноту $C^n[a,b]$ относительно введенной нормы, а также непрерывность умножения.

2) Укажите субмультипликативную норму на $C^n[a,b]$, эквивалентную исходной.

Пример 5 (алгебры измеримых функций). Пусть X — произвольное множество, 2^X — семейство всех его подмножеств. Напомним, что семейство множеств $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *σ-алгеброй*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $X \in \mathscr{A}$;
2) если $S \in \mathscr{A}$, то $X \setminus S \in \mathscr{A}$;
3) если $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{A}$, то $\bigcup_n S_n \in \mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — σ-алгебра подмножеств X. Напомним, что функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *$\mathscr{A}$-измеримой*, если $f^{-1}(U) \in \mathscr{A}$ для любого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$. Обозначим через $B_{\mathscr{A}}(X)$ множество всех $\mathscr{A}$-измеримых ограниченных функций на X. Из свойств измеримых функций, обычно доказываемых в курсе теории меры, следует, что $B_{\mathscr{A}}(X)$ — замкнутая наполненная подалгебра в $\ell^\infty(X)$ и, следовательно, банахова алгебра относительно равномерной нормы.

Выделим один важный частный случай. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств, т.е. наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества. В этом случае $\mathscr{A}$-измеримые функции называются *борелевскими*, а алгебру $B_{\mathscr{A}}(X)$ мы будем обозначать просто $B(X)$.

Другой важный частный случай возникает, когда на $\mathscr{A}$ задана σ-аддитивная положительная мера, т.е. функция $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, +\infty)$, обладающая тем свойством, что $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty S_n\bigr) = \sum_{n=1}^\infty \mu(S_n)$ для любой последовательности $\{S_n\} \subset \mathscr{A}$ попарно не пересекающихся множеств. Тройка $(X, \mathscr{A}, \mu)$ называется *пространством с мерой*. В этом случае существует стандартный способ «расширить« (точнее, «пополнить») σ-алгебру $\mathscr{A}$, добавив к ней все *μ-измеримые* множества. Полученная σ-алгебра $\mathfrak{M}$ содержит $\mathscr{A}$, и мера μ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры на $\mathfrak{M}$. Функции на X, измеримые относительно $\mathfrak{M}$, обычно называют *μ-измеримыми* или просто *измеримыми*. Соответствующая банахова алгебра $B_{\mathfrak{M}}(X)$ ограниченных измеримых функций содержит $B_{\mathscr{A}}(X)$, но не совпадает с ней при $\mathfrak{M} \neq \mathscr{A}$. В частности, для отрезка $[a, b]$, снабженного мерой Лебега, $B[a, b] \neq B_{\mathfrak{M}}[a, b]$ (поскольку измеримых по Лебегу множеств больше, чем борелевских).

Пример 6 (алгебра $L^\infty(X, \mu)$). Пусть $(X, \mu) = (X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Напомним, что измеримые функции $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ называются *μ-эквивалентными* (или просто *эквивалентными*), если они совпадают почти всюду, т.е. если $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$. Класс эквивалентности функции f временно обозначим через $[f]$. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ называется *существенно ограниченной*, если она ограничена на некотором множестве $E \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus E) = 0$. (По-другому можно сказать и так: функция существенно ограничена, если она эквивалентна ограниченной). *Существенной верхней гранью* функции f называется величина

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \inf\bigl\{\, \|f|_E\|_\infty : E \subset X,\ \mu(X \setminus E) = 0 \,\bigr\}.$$

Очевидно, ни свойство быть существенно ограниченной, ни величина $\operatorname{ess\,sup} |f|$ не меняются при замене функции на эквивалентную. Пространство $L^\infty(X, \mu)$ состоит, по определению, из классов эквивалентности существенно ограниченных измеримых функций на X. При этом неважно, рассматривать ли $\mathfrak{M}$-измеримые или только $\mathscr{A}$-измеримые функции: дело в том, что любая $\mathfrak{M}$-измеримая функция эквивалентна $\mathscr{A}$-измеримой. Нетрудно проверить (проверьте, если никогда раньше этого не делали), что $L^\infty(X, \mu)$ — банахово пространство относительно нормы, корректно определенной равенством $\|[f]\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$ для любого представителя $f \in [f]$. Также легко проверяется, что $L^\infty(X, \mu)$ — банахова алгебра относительно поточечного умножения. В дальнейшем мы, как обычно, будем допускать некую вольность речи и говорить о «функциях из $L^\infty(X, \mu)$», подразумевая при этом, конечно, что речь идет о классах эквивалентности.

Чтобы выяснить взаимосвязь алгебр из двух предыдущих примеров, нам понадобится ввести понятие факторалгебры. Вначале напомним чисто алгебраическое

Определение 2. Пусть A — алгебра. Линейное подпространство $I \subset A$ называется *левым идеалом* (соответственно, *правым идеалом*), если $ab \in I$ для любых $a \in A$ и $b \in I$ (соответственно, для любых $a \in I$ и $b \in A$). Подпространство, являющееся одновременно и левым, и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом.*

Если $I \subset A$ — двусторонний идеал, то факторпространство A/I является алгеброй относительно умножения, корректно определенного формулой $(a+I)(b+I) = ab+I$.

Пусть теперь E — банахово пространство, а $E_0 \subset E$ — замкнутое линейное подпространство. На факторпространстве E/E_0 имеется норма, заданная формулой $\|x+E_0\| = \inf\{\|x+y\| : y \in E_0\}$. Иными словами, норма класса эквивалентности $x+E_0$ равна расстоянию от него до нуля. Топология, задаваемая этой нормой — это фактортопология, т.е. сильнейшая топология, в которой отображение $E \to E/E_0,\ x \mapsto x+E_0$ непрерывно. Относительно введенной нормы E/E_0 является банаховым пространством (проверьте!)

Наконец, пусть A — банахова алгебра, а $I \subset A$ — замкнутый двусторонний идеал. Тогда A/I — это алгебра и одновременно банахово пространство.

Упражнение 2. Норма на A/I субмультипликативна. Если A унитальна и $\|1_A\| = 1$, то и $\|1_{A/I}\| = 1$.

Таким образом, факторалгебра A/I банаховой алгебры A по любому замкнутому двустороннему идеалу I сама является банаховой алгеброй.

Упражнение 3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Положим $I_0 = \{f \in B_{\mathscr{A}}(X) : f = 0 \quad \text{почти всюду}\}$. Проверьте, что I_0 — замкнутый идеал в $B_{\mathscr{A}}(X)$, и что факторалгебра $B_{\mathscr{A}}(X)/I_0$ изометрически изоморфна $L^\infty(X, \mu)$.

Предложение 2. *Существенно ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ является обратимым элементом алгебры $L^\infty(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда $\mu(f^{-1}(U)) = 0$ для некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbb{C}$.*

Доказательство. Очевидно, f — обратимый элемент $L^\infty(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда функция $1/f$ определена и ограничена на некотором подмножестве $E \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus E) = 0$. Последнее условие эквивалентно тому, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $|f(x)| \geqslant \varepsilon$ всюду на E. Следовательно, в качестве нужного U подойдет ε-окрестность нуля в $\mathbb{C}$. Обратно, если U с указанным свойством существует, то можно положить $E = X \setminus f^{-1}(U)$. □

Определение 3. Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}$ — измеримая функция. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *существенным значением* f, если $\mu(f^{-1}(U)) > 0$ для любой окрестности $U \ni \lambda$, $U \subset \mathbb{C}$.

Следствие 1. *Пусть $f \in L^\infty(X,\mu)$. Тогда $\sigma(f)$ совпадает с множеством ее существенных значений.*

Упражнение 4. Убедитесь, что множество существенных значений существенно ограниченной измеримой функции — непустой компакт в $\mathbb{C}$.

Из примеров, приведенных на этой и прошлой лекциях, видно, что для многих функциональных алгебр спектры их элементов или совпадают, или «почти совпадают» с множествами значений соответствующих функций. Скоро мы увидим, что это «почти» можно убрать, если надлежащим образом «подправить» область определения функции. А сейчас посмотрим на пример алгебры, в которой, на первый взгляд, это совсем не так.

Пример 7 (две банаховых алгебры аналитических функций). Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{C}$, $\operatorname{Int} K$ — его внутренность. Рассмотрим следующие замкнутые подалгебры в $C(K)$:

$$\mathscr{P}(K) = \overline{\{p|_K : p \in \mathbb{C}[t]\}} \qquad (\text{замыкание в } C(K)),$$
$$\mathscr{A}(K) = \{f \in C(K) : f|_{\operatorname{Int} K} \quad \text{голоморфна}\}.$$

Очевидно, $\mathscr{P}(K) \subset \mathscr{A}(K)$, и $\mathscr{A}(K)$ — наполненная подалгебра в $C(K)$.

Положим $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ называется *дисковой алгеброй.*

Упражнение 5. Проверьте, что
1) $\mathscr{P}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$;
2) $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \neq \mathscr{A}(\mathbb{T})$;
3) алгебры $\mathscr{P}(\mathbb{T})$ и $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ изометрически изоморфны.

Упражнение 6. Покажите, что спектр $\sigma_{\mathscr{P}(\mathbb{T})}(f)$ функции $f \in \mathscr{P}(\mathbb{T})$ не совпадает с множеством $f(\mathbb{T})$, если только f не постоянна. Как следствие, подалгебра $\mathscr{P}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ не является наполненной. Опишите множество $\sigma_{\mathscr{P}(\mathbb{T})}(f)$.

Спектры элементов банаховых алгебр.

Прежде чем говорить о спектрах, посмотрим на некоторые общие свойства группы обратимых элементов в банаховой алгебре.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра.*
(i) *Если $a \in A$, и $\|a\| < 1$, то $1 - a$ обратим, и $(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.*
(ii) *Множество обратимых элементов* $\operatorname{Inv}(A)$ *открыто в A.*
(iii) *Отображение* $\operatorname{Inv}(A) \to \operatorname{Inv}(A)$, $a \mapsto a^{-1}$ *непрерывно.*

Доказательство. (i) Поскольку $\sum_{k=0}^{n} \|a^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|a\|^k$, а A полна, мы видим, что указанный в (i) ряд сходится в A при $\|a\| < 1$ к некоторому $b \in A$. Для каждого n положим $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Легко видеть, что $(1-a)S_n = S_n(1-a) = 1 - a^{n+1}$. При $n \to \infty$ получаем $(1-a)b = b(1-a) = 1$, т.е. $b = (1-a)^{-1}$, как и требовалось.

(ii) Для каждого $a \in \operatorname{Inv}(A)$ отображение $L_a \colon A \to A$, $b \mapsto ab$ является гомеоморфизмом A на себя и переводит $\operatorname{Inv}(A)$ в $\operatorname{Inv}(A)$. Поэтому, если множество $U \subset \operatorname{Inv}(A)$ открыто в A и содержит единицу (а такое U существует в силу (i)), то $L_a(U)$ открыто в A и содержит a.

(iii) Проверим, что отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Для этого надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что при $\|a - 1\| < \delta$, $a \in \operatorname{Inv}(A)$ выполнено $\|a^{-1} - 1\| < \varepsilon$.

Возьмем сперва произвольный $b \in A$, такой, что $\|b\| < 1$. Тогда из (i) следует, что $(1-b)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b^n$, откуда

$$\|(1-b)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|b\|^n = \frac{\|b\|}{1 - \|b\|}. \tag{1}$$

Пусть $\delta > 0$ таково, что $\delta < 1$ и $\delta/(1-\delta) < \varepsilon$. Тогда, если $\|a - 1\| < \delta$, то, подставляя $b = 1 - a$ в (1), мы получаем $\|a^{-1} - 1\| < \varepsilon$, как и требовалось. Таким образом, отображение $a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в единице. Остается воспользоваться следующим общим фактом:

Упражнение 7. Пусть G — группа, снабженная топологией, причем операция умножения $G \times G \to G$ непрерывна, а операция взятия обратного $G \to G$ непрерывна в единице. Тогда операция взятия обратного непрерывна на G.

$\square$

В качестве забавного приложения установим один результат об «автоматической непрерывности». Вначале напомним следующее

Определение 4. Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$. Гомоморфизмы из A в $\mathbb{C}$ называются ее *характерами.*

Замечание 1. Заметим, что ненулевой характер унитальной алгебры унитален (поскольку он сюръективен).

Следствие 2. *Любой характер унитальной банаховой алгебры непрерывен, и его норма не превосходит единицы.*

Доказательство. Если характер $\chi \colon A \to \mathbb{C}$ разрывен, или же если он непрерывен, но $\|\chi\| > 1$, то существует $a \in A$, $\|a\| < 1$, такой, что $\chi(a) = 1$. По теореме 1, элемент $1 - a$ обратим. Следовательно, таков же и $\chi(1 - a) \in \mathbb{C}$. Но последний элемент равен нулю. Противоречие. $\square$

Замечание 2. Для сравнения напомним, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Упражнение 8. Какие утверждения из теоремы 1 сохраняют силу для нормированных алгебр? Сохраняет ли силу следствие 2?

Теперь обратимся к спектрам.

Теорема 2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент. Тогда*
(i) *$\sigma(a)$ — компактное подмножество в $\mathbb{C}$;*
(ii) *если $\lambda \in \sigma(a)$, то $|\lambda| \leqslant \|a\|$.*

Доказательство. Начнем с (ii). Если $|\lambda| > \|a\|$, то $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, поэтому $1-\lambda^{-1}a$ обратим по предыдущей теореме. Значит, и $a - \lambda 1$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(a)$. Это доказывает (ii) и, как следствие, ограниченность $\sigma(a)$. Осталось доказать его замкнутость. Для этого рассмотрим отображение $\varphi \colon \mathbb{C} \to A$, $\varphi(\lambda) = a - \lambda 1$, и заметим, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) = \varphi^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ открыто ввиду непрерывности φ и предыдущей теоремы. Следовательно, $\sigma(a)$ замкнуто, как и требовалось. $\square$

Итак, спектр любого элемента в банаховой алгебре компактен. Покажем теперь, что он непуст. Для этого введем следующее понятие.

Определение 5. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент. *Резольвентной функцией* a называется функция $R_a \colon \mathbb{C} \setminus \sigma(a) \to A$, $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$.

Лемма 1. *R_a непрерывна на $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, и $\lim_{\lambda \to \infty} R_a(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Непрерывность R_a сразу следует из непрерывности взятия обратного в $\mathrm{Inv}(A)$ (теорема 1). Далее,

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a-\lambda 1)^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\,\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\|.$$

Первый сомножитель в последнем выражении стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, а второй — к единице в силу непрерывности взятия обратного. Дальше ясно. $\square$

Оказывается, резольвентная функция не только непрерывна, но и голоморфна в следующем смысле:

Определение 6. Пусть E — банахово пространство, а $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Функция $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если для каждого $z_0 \in U$ существует предел $\lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}$. Этот предел называется *производной* φ в точке z_0 и обозначается $\varphi'(z_0)$.

Замечание 3. Если $\varphi\colon U \to E$ — голоморфная функция, то для любого непрерывного линейного функционала $f \in E^*$ функция $f\circ\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ голоморфна в обычном смысле, и $(f\circ\varphi)'(z) = f(\varphi'(z))$ для всех $z \in U$. Верно и обратное утверждение (т.е. из голоморфности $f\circ\varphi$ для всех $f \in E^*$ следует голоморфность φ), но оно нам не понадобится.

Предложение 3 (тождество Гильберта). *Резольвентная функция удовлетворяет тождеству $R_a(\lambda) - R_a(\mu) = (\lambda-\mu)R_a(\lambda)R_a(\mu)$.*

Доказательство. Достаточно домножить обе части равенства слева на $a-\lambda 1$ и справа на $a-\mu 1$. $\square$

Отсюда и из непрерывности резольвентной функции немедленно следует

Предложение 4. *Резольвентная функция R_a голоморфна на $\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$, и $R_a'(z) = R_a(z)^2$ для любого $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma(a)$.*

Напоминание 1. Прежде чем доказывать непустоту спектра, напомним одно важное следствие из теоремы Хана-Банаха: *если E — нормированное пространство, то для любого $x \in E$, $x \neq 0$ найдется функционал $f \in E^*$, такой, что $f(x) \neq 0$.*

Теорема 3. *Спектр любого элемента унитальной банаховой алгебры непуст.*

Доказательство. Предположим противное; пусть $\sigma(a) = \varnothing$. Зафиксируем функционал $f \in A^*$ и положим $\varphi_f = f\circ R_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Из предложения 4, замечания 3 и леммы 1 следует, что φ_f — это целая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. По теореме Лиувилля, $\varphi_f \equiv 0$. Поскольку f произволен, вышеупомянутое следствие из теоремы Хана-Банаха влечет $R_a(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. С другой стороны, $R_a(\lambda)$ обратим. Противоречие. $\square$

Вот одно любопытное приложение.

Теорема 4 (Гельфанд, Мазур). *Пусть A — банахова алгебра с делением (т.е. унитальная банахова алгебра, в которой любой ненулевой элемент обратим). Тогда A изоморфна $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Возьмем произвольный $a \in A$. Поскольку $\sigma(a) \neq \varnothing$, элемент $a - \lambda 1$ необратим для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Но A — алгебра с делением; значит, $a - \lambda 1 = 0$, т.е. $a = \lambda 1$. Ввиду произвольности $a \in A$, получаем $A = \mathbb{C}1$, как и требовалось. $\square$

Упражнение 9. Верна ли теорема Гельфанда-Мазура для нормированных алгебр?