Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 3.
Теорема об отображении спектра для полиномиального исчисления.

Вернемся ненадолго из функционального анализа в чистую алгебру и установим одно важное алгебраическое свойство спектра. Всюду ниже A — унитальная алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Следующее понятие уже упоминалось на первой лекции в контексте линейных операторов.

Определение 1. *Полиномиальным исчислением* от a называется унитальный гомоморфизм $\gamma_p \colon \mathbb{C}[t] \to A$, такой, что $\gamma_p(t) = a$.

Предложение 1. *Для любого $a \in A$ полиномиальное исчисление от a существует и единственно.*

В дальнейшем для любого $f \in \mathbb{C}[t]$ вместо $\gamma_p(f)$ мы будем иногда писать $f(a)$.

Теорема 1 (об отображении спектра). *Если $\sigma(a) \neq \varnothing$, то $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ для любого $f \in \mathbb{C}[t]$.*

Для доказательства теоремы понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$ — коммутирующие элементы. Тогда элемент $a_1 \ldots a_n$ обратим $\iff$ все элементы $a_1, \ldots, a_n$ обратимы.*

Упражнение 1. Докажите эту лемму.

Упражнение 2. 1) Покажите, что для некоммутирующих $a_1, \ldots, a_n$ утверждение леммы перестает быть верным.

2) Покажите, что при $\dim A < \infty$ лемма верна и для некоммутирующих $a_1, \ldots, a_n$.

Доказательство теоремы. Случай $\deg f = 0$ тривиален (почему?). Пусть $\deg f > 0$. Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разложим многочлен $f - \lambda$ на множители: $f(t) - \lambda = c(t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, где $c \neq 0$. Очевидно, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = f^{-1}(\lambda)$. Поскольку $f(a) - \lambda 1 = c(a - \lambda_1 1) \ldots (a - \lambda_n 1)$, из леммы следует, что

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(f(a)) \iff f(a) - \lambda 1 \quad \text{необратим} \iff \exists i : a - \lambda_i 1 \quad \text{необратим}\\ \iff \sigma(a) \cap f^{-1}(\lambda) \neq \varnothing \iff \lambda \in f(\sigma(a)),\end{aligned}$$

как и требовалось. □

Упражнение 3. 1) В унитальной банаховой алгебре не существует элементов a, b, коммутатор которых $[a, b] = ab - ba$ равен 1.

2) Тем не менее, элементы с указанным свойством существуют в алгебре $\mathscr{L}(E)$, где E — подходящее (а на самом деле — любое) бесконечномерное векторное пространство.

Замечание 1. На первой лекции уже упоминалось, что наблюдаемые в квантовой механике интерпретируются как самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. При этом оказывается, что координата частицы q и ее импульс p должны быть связаны соотношением $[q,p] = i\hbar 1$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Последнее соотношение называется *коммутационным соотношением Гейзенберга* и отражает тот факт, что координата и импульс не могут быть одновременно точно измерены («принцип неопределенности»). Из предыдущего упражнения следует, что ограниченных операторов с таким свойством не существует. Поэтому для нужд квантовой механики приходится использовать неограниченные операторы (причем, как правило, не всюду определенные), а с ними намного сложнее работать ...

Вот еще одно полезное свойство спектра:

Упражнение 4. 1) Пусть A — унитальная алгебра, $a \in A$ — обратимый элемент. Тогда $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(a)\}$. (Или, более коротко, $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$.)

2) Пусть E — банахово пространство, $T \in \mathscr{B}(E)$ — обратимый изометрический оператор. Тогда $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Рациональное исчисление.

Для произвольного подмножества $M \subset \mathbb{C}$ обозначим через $R(M)$ подалгебру в $\mathbb{C}(t)$, состоящую из рациональных функций с полюсами вне M. Иначе говоря,

$$R(M) = \{f \in \mathbb{C}(t) : \exists p, q \in \mathbb{C}[t],\ f = p/q,\ q(z) \neq 0\, \forall z \in M\}.$$

Пусть, как и прежде, A — унитальная алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Определение 2. *Рациональным исчислением* от a на M называется унитальный гомоморфизм $\gamma_r \colon R(M) \to A$, такой, что $\gamma_r(t) = a$.

Если рациональное исчисление от a на M существует, то оно является продолжением полиномиального в очевидном смысле. Поэтому для $f \in R(M)$ вместо $\gamma_r(f)$ обычно пишут просто $f(a)$.

Предложение 2. *Рациональное исчисление от a на M существует тогда и только тогда, когда $\sigma(a) \subset M$; при этом оно единственно.*

Доказательство. (Набросок). Предположим, что $\sigma(a) \subset M$. Возьмем $f \in R(M)$ и представим ее в виде $f = p/q$, где p и q — полиномы, и q не обращается в нуль на M. Из теоремы об отображении спектра следует, что $q(a) \in A$ обратим. Положим $\gamma_r(f) = p(a)q(a)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что $\gamma_r \colon R(M) \to A$ — корректно определенный гомоморфизм. Единственность γ_r очевидна (см. предложение 2 (i) из лекции 1). Необходимость условия $\sigma(a) \subset M$ проверьте сами в качестве упражнения. □

Замечание 2. (Для знакомых с основами коммутативной алгебры). Заметим, что алгебра $R(M)$ — это в точности кольцо частных $\mathbb{C}[t]$ относительно мультипликативной системы $S = \{q \in \mathbb{C}[t] : q(z) \neq 0\, \forall z \in M\}$. Поэтому существование и единственность рационального исчисления сразу следует из универсального свойства колец частных с учетом того, что $\gamma_p(q)$ обратим в A для любого $q \in S$.

Каждой функции $f \in R(M)$ можно присвоить значение в произвольной точке $z \in M$. Для этого представим f в виде $f = p/q$, где $p, q \in \mathbb{C}[t]$ и q не обращается в нуль на M, и положим по определению $f(z) = p(z)/q(z)$. Получаем «настоящую» функцию $\tilde f$ на M, заданную по правилу $\tilde f(z) = f(z)$ для всех $z \in M$. Сопоставление $f \mapsto \tilde f$ является унитальным гомоморфизмом из $R(M)$ в $\mathbb{C}^M$. Отметим, что этот гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда M бесконечно; в этом случае $R(M)$ можно считать подалгеброй в $\mathbb{C}^M$.

Упражнение 5 (теорема об отображении спектра). Предположим, что $\sigma(a) \neq \varnothing$, и $\sigma(a) \subset M$. Докажите, что $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ для любой $f \in R(M)$.

Замечание 3. Очевидно, f является обратимым элементом $R(M)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \neq 0$ нигде на M, т.е. когда $\tilde f$ — обратимый элемент $\mathbb{C}^M$. Поэтому

$$\sigma_{R(M)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^M}(\tilde f) = f(M).$$

А теперь положим в предыдущем упражнении $M = \sigma(a)$. С учетом сказанного выше, равенство $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ можно переписать так:

$$\sigma_A(\gamma_r(f)) = \sigma_{R(\sigma(a))}(f).$$

Иными словами, гомоморфизм γ_r «сохраняет спектр» (напомним, что в общем случае гомоморфизм «не увеличивает спектр»; ср. предложение 2 (ii) из лекции 1). С явлениями такого рода мы встретимся еще неоднократно.

Спектральный радиус.

Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — фиксированный элемент.

Определение 3. Число $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ называется *спектральным радиусом* элемента $a \in A$.

Поскольку $\sigma(a)$ — непустой компакт в $\mathbb{C}$, спектральный радиус любого элемента определен и конечен. Кроме того, из доказанного на прошлой лекции (теорема 2 (ii)) сразу следует, что $r(a) \leqslant \|a\|$.

Пример 1. Легко видеть, что в алгебре $A = \ell^\infty(X)$ для любого $a \in A$ справедливо равенство $r(a) = \|a\|$. То же самое верно и в любой ее наполненной подалгебре — в частности, в алгебрах $C(\Omega)$ и $B_{\mathscr{A}}(X)$.

Упражнение 6. Верно ли, что $r(a) = \|a\|$ в алгебре $L^\infty(X, \mu)$? А в алгебре $C^n[a, b]$?

Упражнение 7. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, где $\mathbb{C}^n$ снабжено евклидовой нормой. Предположим, что оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ записывается в некотором ортонормированном базисе диагональной матрицей. Докажите, что $r(T) = \|T\|$.

Пример 2. Пусть $A = \mathscr{B}(\mathbb{C}^2)$, а оператор T записывается матрицей $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (см. пример 2 из лекции 1). Тогда $\sigma(T) = \{0\}$, поэтому и $r(T) = 0$; с другой стороны, $\|T\| \neq 0$.

Кстати, примеров такого рода можно построить довольно много:

Упражнение 8. Пусть A — произвольная унитальная алгебра, $a \in A$ — нильпотентный элемент (т.е. $a^n = 0$ для некоторого n). Тогда $\sigma(a) = \{0\}$.

Напоминание 1. Прежде чем доказывать следующую теорему, напомним одно следствие из теоремы Банаха-Штейнгауза:

Пусть E — нормированное пространство, $M \subset E$ — подмножество. Предположим, что для любого $f \in E^*$ множество $f(M) \subset \mathbb{C}$ ограничено. Тогда и M ограничено.

Теорема 2 (формула Бёрлинга). *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$. Тогда*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство. Достаточно установить, что $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$ и $r(a) \geqslant \overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n}$; отсюда будет следовать как существование указанного в формулировке предела, так и его совпадение с $r(a)$.

Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ ввиду теоремы об отображении спектра. Поэтому $|\lambda^n| \leqslant \|a^n\|$ и $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{1/n}$. Беря inf по $n \in \mathbb{N}$, а затем sup по $\lambda \in \sigma(a)$, получаем неравенство $r(a) \leqslant \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.

Для доказательства второго неравенства возьмем круг $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1/r(a)\}$ (если $r(a) = 0$, то $D = \mathbb{C}$), зафиксируем функционал $f \in A^*$ и рассмотрим функцию $\psi_f(\lambda) = f\big((1 - \lambda a)^{-1}\big)$, заданную на D. Напомним, что функция $\lambda \mapsto (1 - \lambda a)^{-1} = -\lambda^{-1} R_a(\lambda^{-1})$ голоморфна в $D \setminus \{0\}$ и стремится к 1 при $\lambda \to 0$ (см. прошлую лекцию). Следовательно, ψ_f голоморфна в D (по теореме об устранимой особенности) и поэтому разлагается в ряд Тэйлора: $\psi_f(\lambda) = \sum_n c_n \lambda^n$ для всех $\lambda \in D$.

Если $|\lambda| < 1/\|a\|$, то $(1 - \lambda a)^{-1} = \sum_n (\lambda a)^n$ (см. теорему 1 из лекции 2). Поэтому $\psi_f(\lambda) = \sum_n f(a^n)\lambda^n$ для всех таких λ. Пользуясь единственностью ряда Тэйлора, заключаем, что $c_n = f(a^n)$ для всех n.

Зафиксируем произвольное $\lambda \in D$, $\lambda \neq 0$. Поскольку ряд $\sum_n f(a^n)\lambda^n$ сходится, последовательность $\{f(a^n)\lambda^n\}$ ограничена. Но это верно для любого $f \in A^*$, поэтому из теоремы Банаха-Штейнгауза следует, что последовательность $\{\lambda^n a^n\}$ ограничена в A, т.е. $\|\lambda^n a^n\| \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех n. Отсюда $\|a^n\|^{1/n} \leqslant C^{1/n}/|\lambda|$, и, переходя к верхнему пределу, получаем $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant 1/|\lambda|$. Ввиду произвольности $\lambda \in D \setminus \{0\}$, отсюда следует, что $\overline{\lim}_n \|a^n\|^{1/n} \leqslant r(a)$, как и требовалось.

Итак, оба нужных неравенства установлены, и теорема доказана. □

Следствие 1. *(Ср. упр. 8).* $\sigma(a) = 0 \iff \lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$.

Определение 4. Элемент $a \in A$ называется *квазинильпотентным*, если он удовлетворяет условию предыдущего следствия.

Упражнение 9. В каких банаховых алгебрах из приведенных ранее примеров существуют квазинильпотентные элементы, не являющиеся нильпотентными?

Напомним, что спектр элемента может уменьшиться, если его рассматривать как элемент некоторой большей алгебры. Тем не менее, из доказанной теоремы следует, что спектральный радиус уменьшиться не может:

Следствие 2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $B \subset A$ — замкнутая подалгебра, $1_A \in B$. Тогда $r_B(b) = r_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Следующее упражнение усиливает это следствие. В дальнейшем для каждого подмножества $M \subset \mathbb{C}$ символом ∂M мы будем обозначать его границу.

Упражнение 10. В условиях предыдущего следствия докажите, что $\partial\sigma_B(b) \subset \partial\sigma_A(b)$ для любого $b \in B$.

Определение 5. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$. Объединение $\sigma(a)$ и всех ограниченных компонент связности его дополнения называется *полным спектром* a и обозначается $\sigma_f(a)$.

С геометрической точки зрения, $\sigma_f(a)$ получается из $\sigma(a)$ «заклеиванием дыр».

Упражнение 11. В условиях следствия 2 докажите, что $\sigma_{f,B}(b) = \sigma_{f,A}(b)$ для любого $b \in B$.

Полезно посмотреть, во что превращается результат последнего упражнения при $A = \mathscr{A}(K)$ и $B = \mathscr{P}(K)$ (например, для $K = \mathbb{T}$ и функции $a(z) = z$).

Спектры ограниченных операторов: примеры и части спектра.

От общих банаховых алгебр перейдем теперь к алгебре ограниченных операторов $\mathscr{B}(E)$, где E — банахово пространство, и посмотрим, как устроены спектры некоторых «классических» операторов.

Пример 3 (диагональный оператор). Пусть E — это либо ℓ^p (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), либо c_0 (напомним, что c_0 — это пространство всех стремящихся к нулю последовательностей, снабженное sup-нормой). Таким образом, элементы E — это последовательности $x = (x_n)$, удовлетворяющие тем или иным условиям. Каждой ограниченной последовательности $\lambda \in \ell^\infty$ соответствует оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(E)$, действующий по правилу $M_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)$ для всех $x = (x_n) \in E$.

Упражнение 12. Отображение $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(E)$, $\lambda \mapsto M_\lambda$ является изометрическим унитальным гомоморфизмом банаховых алгебр. В частности, $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty = \sup_n |\lambda_n|$.

Предложение 3. *Гомоморфизм φ, описанный в предыдущем упражнении, «сохраняет спектр»: $\sigma_{\mathscr{B}(E)}(\varphi(\lambda)) = \sigma_{\ell^\infty}(\lambda)$. Иными словами, $\sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\operatorname{Im}\varphi$ — наполненная подалгебра в $\mathscr{B}(E)$, т.е. что для любого необратимого $\lambda \in \ell^\infty$ оператор M_λ необратим.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in E$ последовательность с единицей на n-ом месте и нулем на остальных, и заметим, что $M_\lambda e_n = \lambda_n e_n$. Если $\lambda \in \ell^\infty$ необратим, т.е. $0 \in \overline{\{\lambda_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, то возможны следующие случаи:

1) $\lambda_n = 0$ для некоторого n. В этом случае $M_\lambda e_n = 0$, поэтому M_λ не инъективен, а, значит, не обратим.

2) $\lambda_n \neq 0$ ни для какого n. В этом случае существует подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\} \subset \{\lambda_n\}$, стремящаяся к нулю. Поэтому $M_\lambda(e_{n_k}) = \lambda_{n_k} e_{n_k} \to 0$ при $k \to \infty$. Но обратимый оператор, будучи гомеоморфизмом, не может переводить последовательность векторов единичной длины в последовательность, стремящуюся к нулю. Поэтому M_λ необратим. $\square$

Пример 4 (оператор умножения на функцию). Пусть (X, μ) — пространство с мерой, и пусть $E = L^p(X, \mu)$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Каждая измеримая существенно ограниченная функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ задает оператор $M_f \in \mathscr{B}(E)$, действующий по правилу $(M_f g)(x) = f(x)g(x)$.

Упражнение 13. Отображение $\varphi\colon L^\infty(X, \mu) \to \mathscr{B}(E)$, $f \mapsto M_f$ является изометрическим унитальным гомоморфизмом банаховых алгебр. В частности, $\|M_f\| = \|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$.

Упражнение 14. Гомоморфизм φ, описанный в предыдущем упражнении, «сохраняет спектр»: $\sigma_{\mathscr{B}(E)}(\varphi(f)) = \sigma_{L^\infty(X,\mu)}(f)$. Иными словами, $\sigma(M_f)$ — это множество существенных значений f.

Посмотрим еще раз на доказательство предложения 3. На этом примере хорошо видно, что спектр оператора естественно разбить на несколько частей в зависимости от того, по какой причине соответствующий оператор $T - \lambda\mathbf{1}$ необратим.

Вообще, пусть S — произвольный ограниченный оператор в E. Почему он может оказаться необратимым? Во-первых, может оказаться, что $\operatorname{Ker} S \neq 0$ (в конечномерном случае этим все и исчерпывается — инъективный оператор в конечномерном пространстве обратим). Во-вторых, возможен случай, когда $\operatorname{Ker} S = 0$, но $\operatorname{Im} S \neq E$ (приведите пример!) Его удобно разбить на два подслучая: либо $\operatorname{Im} S$ плотен в E, либо нет. В применении к оператору $S = T - \lambda\mathbf{1}$ это приводит к следующему определению.

Определение 6. *Точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ называется множество

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq 0\}.$$

Непрерывным спектром T называется множество

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} = E,\ \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq E\}.$$

Наконец, *остаточным спектром* T называется множество

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq E\}.$$

Очевидно, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T)$. Заметим, что точечный спектр $\sigma_p(T)$ — это в точности множество собственных значений T. Если E конечномерно, то $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, а $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$ пусты. Посмотрим, что происходит в бесконечномерном случае.

Предложение 4. *Пусть $E = \ell^p$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или $E = c_0$, и пусть $M_\lambda \in \mathscr{B}(E)$ — оператор умножения на ограниченную последовательность $\lambda \in \ell^\infty$ (см. пример 3). Тогда $\sigma_p(M_\lambda) = \{\lambda_n\}$, $\sigma_c(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}} \setminus \{\lambda_n\}$ и $\sigma_r(M_\lambda) = \varnothing$.*

Доказательство. Поскольку $M_\lambda e_n = \lambda_n e_n$, справедливо включение $\{\lambda_n\} \subset \sigma_p(M_\lambda)$. С другой стороны, если $\mu \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq \lambda_n$ ни для какого n, то $M_\lambda - \mu\mathbf{1} = M_{\lambda - \mu 1}$ — это оператор умножения на последовательность $\lambda - \mu 1 = (\lambda_n - \mu)$ ненулевых чисел. Поэтому, очевидно, $\operatorname{Ker}(M_\lambda - \mu\mathbf{1}) = 0$, и $\mu \notin \sigma_p(T)$. Наконец, пусть $\mu \in \sigma(M_\lambda) = \overline{\{\lambda_n\}}$, но $\mu \neq \lambda_n$ ни для какого n. Тогда вектор $e_n = (\lambda_n - \mu)^{-1}(M_\lambda - \mu\mathbf{1})e_n$ лежит в $\operatorname{Im}(M_\lambda - \mu\mathbf{1})$ для всех n. Но линейная оболочка e_n-ых плотна в E; значит, и $\operatorname{Im}(M_\lambda - \mu\mathbf{1})$ плотен в E, т.е. $\mu \in \sigma_c(M_\lambda)$. $\square$

Упражнение 15. Найдите $\sigma_p(M_\lambda)$, $\sigma_c(M_\lambda)$ и $\sigma_r(M_\lambda)$ в случае, когда $E = \ell^\infty$.

Упражнение 16. Пусть $E = L^p(X, \mu)$ (где $1 \leqslant p < \infty$), и пусть $M_f \in \mathscr{B}(E)$ — оператор умножения на существенно ограниченную измеримую функцию $f\colon X \to \mathbb{C}$ (см. пример 4). Тогда $\sigma_p(M_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(f^{-1}(\lambda)) > 0\}$, $\sigma_c(M_f) = \sigma(M_f) \setminus \sigma_p(M_f)$, и $\sigma_r(M_f) = \varnothing$.

Замечание 4. Важный частный случай предыдущего упражнения — оператор умножения на «независимую переменную» M_t, действующий в $L^2[0,1]$ по правилу $(M_t g)(x) = xg(x)$. У него $\sigma(M_t) = \sigma_c(M_t) = [0,1]$, а точечный и остаточный спектр пусты.

Кстати, полезно представлять себе, как устроено множество существенных значений непрерывной функции:

Упражнение 17. 1) Если f — непрерывная функция на отрезке, то множество существенных значений f — это в точности множество ее значений.

2) Пусть $f \in L^\infty(X, \mu)$; верно ли, что каждое значение f является ее существенным значением?

3) Обратно, верно ли, что каждое существенное значение $f \in L^\infty(X, \mu)$ является ее значением?

Упражнение 18. Найдите $\sigma_p(M_f)$, $\sigma_c(M_f)$ и $\sigma_r(M_f)$ в случае, когда $E = L^\infty(X, \mu)$.