Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Лекция 4.
Части спектра ограниченных операторов (продолжение).

Чтобы находить спектры ограниченных операторов, часто бывает удобно использовать соображения двойственности.

Напоминание 1. Пусть E, F — банаховы пространства, $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор. Отображение $T^*\colon F^* \to E^*$, действующее по правилу $T^*f = f \circ T$, называется *сопряженным оператором* к T. Этот оператор также линеен, ограничен, и $\|T^*\| = \|T\|$.

Если Вы не встречались раньше со следующим фактом, обязательно сделайте его в качестве упражнения.

Упражнение 1. Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — топологический изоморфизм $\iff$ T^* — топологический изоморфизм.

Замечание 1. Разумеется, импликация $\Longrightarrow$ в предыдущем упражнении тривиальна (почему?) и верна также для неполных нормированных пространств. А вот обратная импликация существенно использует полноту E и F (постройте соответствующий контрпример).

Поскольку $(T - \lambda \mathbf{1}_E)^* = T^* - \lambda \mathbf{1}_{E^*}$ для любого $T \in \mathscr{B}(E)$, справедливо

Следствие 1. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$; тогда $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.*

Итак, спектры у T и T^* совпадают. А что можно сказать про части спектра — непрерывный, точечный и остаточный? Для этого нам понадобится следующий несложный факт.

Упражнение 2. Пусть $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор между банаховыми пространствами. Тогда

1) $\overline{\operatorname{Im} T} = F \iff \operatorname{Ker} T^* = 0$;
2) $\overline{\operatorname{Im} T^*} = E^* \Longrightarrow \operatorname{Ker} T = 0$;
3) Обратная импликация верна, если E рефлексивно, а в общем случае — нет.

Применяя результат этого упражнения к оператору $T - \lambda\mathbf{1}$ (где $T \in \mathscr{B}(E)$), получаем следующие соотношения:

Предложение 1. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$. Тогда*

1) $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
2) $\sigma_c(T) \subset \sigma_c(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;
3) $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*)$;
4) $\sigma_p(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$;

При составлении конспекта использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

5) $\sigma_c(T^*) \subset \sigma_c(T)$;
6) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$.

Если же E рефлексивно, то

7) $\sigma_c(T) = \sigma_c(T^*)$;
8) $\sigma_r(T^*) \subset \sigma_p(T)$.

Посмотрим на несколько классических примеров.

Пример 1 (левый и правый сдвиги). Пусть $E = \ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), либо $E = c_0$. Оператор *правого сдвига* $T_r \in \mathscr{B}(E)$ действует по правилу $T_r(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in E$. Очевидно, он изометричен, поэтому $\|T_r\| = 1$. Оператор *левого сдвига* $T_\ell \in \mathscr{B}(E)$ задается формулой $T_r(x) = (x_2, x_3, \dots)$. Он, конечно, не изометричен (поскольку имеет ненулевое ядро), но все же $\|T_\ell\| = 1$ (почему?).

Напоминание 2. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и q таково, что $1/p + 1/q = 1$ (если $p = 1$, то $q = \infty$). Тогда оператор

$$\ell^q \to (\ell^p)^*, \quad y \mapsto f_y, \quad f_y(x) = \sum_i x_i y_i$$

является изометрическим изоморфизмом. Аналогичным образом определяется изометрический изоморфизм $\ell^1 \to (c_0)^*$.

С другой стороны, важно помнить следующее:

Упражнение 3. Пространства $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1 не являются топологически изоморфными.

Упражнение 4. Пространства ℓ^p рефлексивны при $1 < p < \infty$, а пространства c_0, ℓ^1 и ℓ^∞ — нет.

Если отождествить $(\ell^p)^*$ и ℓ^q при помощи описанного выше изоморфизма, то оператор, сопряженный к левому сдвигу, «превратится» в правый сдвиг, и наоборот. Чтобы сказать это более строго, надо договориться о том, какие операторы считать «одинаковыми». Тут есть два подхода: все зависит от того, какие банаховы пространства мы считаем «одинаковыми» — топологически изоморфные или же изометрически изоморфные[1].

Определение 1. Пусть $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ — ограниченные операторы в банаховых пространствах. Они называются *подобными* (соответственно, *изометрически эквивалентными*), если существует топологический изоморфизм (соответственно, изометрический изоморфизм) $U \colon E \to F$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & E \arrow[d, "U"] \\ F \arrow[r, "T"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна.

[1]Для ценителей общематематических концепций: все зависит от того, в какой *категории* банаховых пространств мы работаем.

Упражнение 5. Если $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ подобны, то $\sigma(S) = \sigma(T)$, и то же самое верно для σ_p, σ_c, σ_r.

Упражнение 6. Пусть $1 \leqslant p < \infty$, и $1/p + 1/q = 1$. Пусть T_r — правый сдвиг в ℓ^p (соответственно, в c_0), а T_ℓ — левый сдвиг в ℓ^q (соответственно, в ℓ^1). Тогда $(T_r)^*$ и T_ℓ изометрически эквивалентны. То же самое верно, если поменять символы "r" и "ℓ" местами.

Предложение 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, *и* $T_r, T_\ell \in \mathscr{B}(\ell^p)$ — *операторы правого и левого сдвига. Тогда:*
1) $\sigma(T_r) = \sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$;
2) $\sigma_p(T_r) = \varnothing, \quad \sigma_c(T_r) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$;
3) $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T_\ell) = \varnothing$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что спектры наших операторов лежат в $\overline{\mathbb{D}}$, поскольку их нормы равны 1. Найдем вначале их точечные спектры. Заметим, что

$$T_r x = \lambda x \iff (0 = \lambda x_1)\&(x_n = \lambda x_{n+1}\ \forall n) \iff x = 0,$$

поэтому $\sigma_p(T_r) = \varnothing$. С другой стороны,

$$T_\ell x = \lambda x \iff x_{n+1} = \lambda x_n\ \forall n \iff x_n = x_1 \lambda^{n-1}\ \forall n,$$

поэтому вектор $x \neq 0$ является собственным для T_ℓ с собственным значением λ тогда и только тогда, когда последовательность (λ^{n-1}) лежит в ℓ^p, т.е. когда $|\lambda| < 1$. Следовательно, $\sigma_p(T_\ell) = \mathbb{D}$.

Обозначим временно наши операторы через $T_r^{(p)}$ и $T_\ell^{(p)}$ соответственно. Пусть $1/p + 1/q = 1$; тогда из предложения 1 следует, что

$$\mathbb{D} = \sigma_p(T_\ell^{(q)}) \subset \sigma_p(T_r^{(p)}) \cup \sigma_r(T_r^{(p)}) = \sigma_r(T_r^{(p)}) \subset \sigma_p(T_\ell^{(q)}) = \mathbb{D}.$$

Значит, $\sigma_r(T_r) = \mathbb{D}$. С учетом замкнутости спектра, отсюда сразу следует, что $\sigma(T_r) = \overline{\mathbb{D}}$ и что $\sigma_c(T_r) = \mathbb{T}$. Ясно, что это верно как в ℓ^p, так и в ℓ^q; поэтому из следствия 1 и предложения 1 мы заключаем, что $\sigma(T_\ell) = \overline{\mathbb{D}}$ и $\sigma_c(T_\ell) = \mathbb{T}$. Оставшееся равенство $\sigma_r(T_\ell) = \varnothing$ теперь очевидно. □

Замечание 2. Полезное упражнение — доказать это предложение «в лоб», т.е. не используя соображений двойственности. Задача вполне решаемая, но, согласитесь, с двойственностью все выглядит куда проще и красивее.

Упражнение 7. Найти спектры и его части (т.е. непрерывный, точечный, остаточный спектры) операторов левого и правого сдвига, действующих в c_0, ℓ^1 и ℓ^∞.

Пример 2 (сдвиги на группах). Операторы, о которых пойдет речь ниже, строятся по следующей общей схеме. Пусть G — группа, E — некоторое пространство функций на G, $g \in G$ — фиксированный элемент. *Оператор сдвига* $T_g \colon E \to E$ задается формулой $(T_g f)(h) = f(g^{-1}h)$ для $f \in E$, $h \in G$. Разумеется, чтобы оператор был корректно определен, нужно, чтобы пространство E было «инвариантно относительно сдвигов». Нас будут интересовать следующие случаи:

1. $G = \mathbb{Z}$, $E = \ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = c_0(\mathbb{Z})$. Оператор *двустороннего сдвига*[1] $T_b \in \mathscr{B}(E)$ определяется формулой $(T_b x)_n = x_{n-1}$ для $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$. Очевидно, он изометричен и обратим.

2. $G = \mathbb{T}$ — группа комплексных чисел, равных по модулю 1, относительно операции умножения. Введем на $\mathbb{T}$ меру «длина дуги, деленная на 2π», и положим $E = L^p(\mathbb{T})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = C(\mathbb{T})$. Для каждого $\zeta \in \mathbb{T}$ определим оператор $T_\zeta \in \mathscr{B}(E)$ формулой $(T_\zeta f)(z) = f(\zeta^{-1} z)$ для $f \in E$, $z \in \mathbb{T}$. Очевидно, он изометричен (ввиду инвариантности нашей меры относительно «поворотов») и обратим; обратным оператором является $T_{\zeta^{-1}}$.

2. $G = \mathbb{R}$, $E = L^p(\mathbb{R})$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или же $E = C_0(\mathbb{R})$ (пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности, снабженное sup-нормой). Для каждого $s \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_s \in \mathscr{B}(E)$ формулой $(T_s f)(t) = f(t - s)$ для $f \in E$, $s \in \mathbb{R}$. Очевидно, он также изометричен (ввиду инвариантности меры Лебега относительно сдвигов) и обратим; обратным оператором является T_{-s}.

Поскольку все три оператора изометричны и обратимы, их спектры содержатся в $\mathbb{T}$ (см. упражнение 4 из лекции 3).

Чтобы найти спектры и части спектра операторов сдвига, обсудим один общий метод, который устанавливает взаимосвязь между операторами сдвига и умножения на функцию (см. примеры 3 и 4 из лекции 3). Этот метод лежит в основе целой науки — *абстрактного гармонического анализа.*

Предложение 3. *1) Оператор двустороннего сдвига $T_b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ и оператор умножения $M_z \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{T}))$, $(M_z f)(z) = z f(z)$ изометрически эквивалентны.*

2) Оператор сдвига на окружности $T_\zeta \in L^2(\mathbb{T})$ и диагональный оператор $M_{(\zeta^{-n})} \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, $M_{(\zeta^{-n})}(x) = (\zeta^{-n} x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ изометрически эквивалентны.

Доказательство. В обоих случаях нужную изометрическую эквивалентность осуществляет оператор $U\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, сопоставляющий каждой $f \in L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье относительно тригонометрической системы: $(Uf)_n = \langle f, z^n \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n}\, dz$. □

Поскольку спектры операторов умножения нам уже известны (см. прошлую лекцию), для нахождения спетров операторов сдвига остается воспользоваться результатом упражнения 5.

Следствие 2. *Пусть $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ — оператор двустороннего сдвига. Тогда $\sigma(T_b) = \sigma_c(T_b) = \mathbb{T}$.*

Следствие 3. *Пусть $T_\zeta \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{T}))$ — оператор сдвига на окружности. Тогда $\sigma_p(T_\zeta) = \{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\sigma_r(T_\zeta) = \varnothing$. Кроме того,*

1) если ζ — корень из единицы, то $\sigma(T_\zeta) = \{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$;

2) если ζ не является корнем из единицы, то $\sigma(T_\zeta) = \mathbb{T}$.

[1] Не очень удачное название: на самом деле, сдвигает этот оператор вправо, только последовательности $(x_n) \in E$ теперь, в отличие от предыдущего примера, «двусторонние».

Доказательство. Если ζ — корень из единицы, то множество $\{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ конечно и потому замкнуто. Если же ζ не является корнем из единицы, то это множество всюду плотно на окружности. Остальное следует из предложений 3 и 4 из прошлой лекции. $\square$

Упражнение 8. 1) Оператор сдвига $T_s \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$ и оператор умножения $M_{e^{-ist}} \in \mathscr{B}(L^2(\mathbb{R}))$, $(M_{e^{-ist}}f)(t) = e^{-ist}f(t)$ изометрически эквивалентны.

2) $\sigma(T_s) = \sigma_c(T_s) = \mathbb{T}$.

Указание: воспользоваться преобразованием Фурье.

Упражнение 9. Найти спектр и его части (непрерывный, точечный, остаточный) для операторов сдвига из примера 2, действующих в соответствующих ℓ^p- или L^p-пространствах при $p \neq 2$, а также в $c_0(\mathbb{Z})$ или (смотря по смыслу) $C_0(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{T})$.

Предложение 3 и упражнение 8 показывают, что у операторов сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$, $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$ есть *функциональные модели* — операторы умножения на функцию или последовательность. Наличие у оператора функциональной модели — свойство весьма удобное, позволяющее глубже понять природу этого оператора, узнать, какие у него есть инвариантные подпространства и т.п. Мы еще вернемся к функциональным моделям, когда доберемся до спектральной теоремы. А сейчас давайте убедимся, что функциональная модель есть и у оператора правого сдвига в ℓ^2.

Определение 2. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \langle f, z^n\rangle = 0 \quad \forall n < 0\}.$$

Иными словами, H^2 состоит в точности из тех $f \in L^2(\mathbb{T})$, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю.

То же самое пространство можно определить как некое пространство аналитических функций:

Упражнение 10. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} : f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho\to 1}\|f\|_\rho < \infty\}.$$

Указание. Установите взаимосвязь между тригонометрическими рядами Фурье и рядами Тэйлора.

Упражнение 11. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 изометрически эквивалентен оператору умножения M_z (см. предложение 3 (1)) в H^2.

Что же касается оператора левого сдвига, то он, несмотря на кажущуюся схожесть с оператором правого сдвига, никакой разумной функциональной моделью не обладает. Но это уже гораздо более сложный факт, выходящий за рамки нашего курса.

Спектры операторов из примеров 1 и 2 (за исключением сдвига на окружности), а также части их спектров, обладают одним любопытным свойством: они «круглые». Это означает, что если какая-то точка попала в спектр или в одну из его частей, то туда же попадает и вся окружность с центром в нуле, проходящая через эту точку. Чтобы понять, почему так происходит, введем еще одно общее понятие.

Определение 3. Пусть $S \in \mathscr{B}(E)$ и $T \in \mathscr{B}(F)$ — ограниченные операторы в банаховых пространствах. Они называются *слабо подобными* (соответственно, *слабо изометрически эквивалентными*), если существуют топологические изоморфизмы (соответственно, изометрические изоморфизмы) $U_1, U_2 \colon E \to F$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U_1"'] & E \arrow[d, "U_2"] \\ F \arrow[r, "T"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Разумеется, если операторы подобны, то они слабо подобны, и аналогичное утверждение справедливо для изометрической эквивалентности. Обратное, конечно, неверно: посмотрите на тождественный оператор $\mathbf{1}_E$. Тот же пример показывает, что спектры слабо подобных операторов вовсе не обязаны совпадать. Тем не менее, легко проверить (проверьте!), что свойства «быть обратимым», «быть инъективным», «иметь плотный образ» и т.п. не меняются при замене оператора на слабо подобный.

Упражнение 12. Пусть T — любой из операторов из примера 1 или 2, кроме сдвига на окружности, и пусть $\lambda \in \mathbb{T}$. Тогда операторы $T - \mathbf{1}$ и $T - \lambda\mathbf{1}$ слабо подобны. Как следствие, $\lambda \in \sigma(T) \iff 1 \in \sigma(T)$, и то же самое верно для σ_p, σ_c и σ_r.