Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 4.
Части спектра ограниченных операторов (продолжение).

На этой лекции мы продолжим наше знакомство со спектрами операторов. Наша ближайшая цель — рассмотреть еще несколько частей спектра и выяснить их взаимоотношения с точечным, непрерывным и остаточным спектрами, о которых шла речь на предыдущих лекциях.

Определение 1. Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ между банаховыми пространствами называется *топологически инъективным*, если $T\colon E \to \operatorname{Im} T$ — гомеоморфизм.

Упражнение 1. 1) T топологически инъективен $\iff$ он *ограничен снизу*, т.е. существует $c > 0$, такое, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in E$.
2) T топологически инъективен $\iff$ T инъективен и $\operatorname{Im} T$ замкнут.
3) Верны ли предыдущие утверждения для операторов в нормированных пространствах?

Определение 2. *Аппроксимативным точечным спектром* оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ называется множество

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda\mathbf{1} \text{ не является топологически инъективным}\}.$$

Спектром сюръективности T называется множество

$$\sigma_{su}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1}) \neq E\}.$$

Спектром сжатия T называется множество

$$\sigma_{com}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda\mathbf{1})} \neq E\}.$$

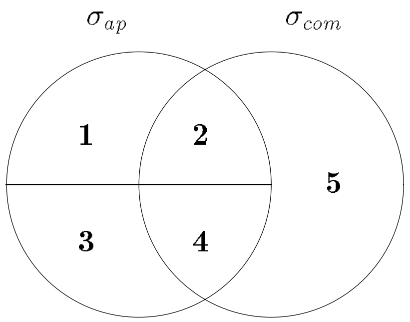
Отметим несколько очевидных свойств этих частей спектра.

Предложение 1. *Справедливы соотношения*
1) $\sigma_p(T) \cup \sigma_{su}(T) = \sigma(T)$,
2) $\sigma_{ap}(T) \cup \sigma_{com}(T) = \sigma(T)$,
3) $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$,
4) $\sigma_{com}(T) \subset \sigma_{su}(T)$.

Доказательство. В комментарии нуждается лишь второе из перечисленных соотношений. Оно следует из того факта, что топологически инъективный оператор имеет замкнутый образ, поэтому топологически инъективный оператор с плотным образом обратим. □

Итак, у нас набралось уже шесть частей спектра. Чтобы понять, как все они связаны друг с другом, удобно нарисовать[1] следующую картинку:

[1]По совету П. Халмоша (Гильбертово пространство в задачах, М.:Мир, 1970.)



$$
\begin{aligned}
\sigma_p(T) &= \mathbf{1} \cup \mathbf{2}\\
\sigma_{ap}(T) &= \mathbf{1} \cup \mathbf{2} \cup \mathbf{3} \cup \mathbf{4}\\
\sigma_{com}(T) &= \mathbf{2} \cup \mathbf{4} \cup \mathbf{5}\\
\sigma_r(T) &= \mathbf{4} \cup \mathbf{5}\\
\sigma_c(T) &= \mathbf{3}\\
\sigma_{su}(T) &\supset \mathbf{2} \cup \mathbf{3} \cup \mathbf{4} \cup \mathbf{5}
\end{aligned}
$$

Левый круг в этой картинке — это $\sigma_{ap}(T)$, его верхняя половина — $\sigma_p(T)$, а правый круг — $\sigma_{com}(T)$. Остальные соотношения, указанные в правой части рисунка, вытекают непосредственно из определений.

Посмотрим теперь, как σ_{ap}, σ_{com} и σ_{su} реагируют на переход к сопряженному оператору (ср. предложение 1 из прошлой лекции). Для этого нам понадобится следующий факт.

Упражнение 2. Пусть E, F — банаховы пространства, $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор. Тогда

1) T топологически инъективен $\iff$ T^* сюръективен;

2) T сюръективен $\Longrightarrow$ T^* топологически инъективен.

3)* Верно и обратное утверждение.

Применяя результат последнего упражнения к оператору $T - \lambda\mathbf{1}$ (где $T \in \mathscr{B}(E)$), получаем следующие соотношения:

Предложение 2. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$. Тогда*

1) $\sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T^*)$*;*

2) $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$*;*

3) $\sigma_{com}(T) = \sigma_p(T^*)$*;*

4) $\sigma_p(T) \subset \sigma_{com}(T^*)$*.*

Если же E рефлексивно, то

7) $\sigma_p(T) = \sigma_{com}(T^*)$*.*

Упражнение 3. Найдите σ_{ap}, σ_{com} и σ_{su} для диагонального оператора, операторов умножения и сдвига (см. лекции 3 и 4).

Мы уже знаем, что точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора могут быть незамкнутыми, а могут быть и пустыми (см. примеры из лекций 3 и 4) — в отличие от всего спектра, который всегда компактен и непуст. А вот с аппроксимативным точечным спектром, а также со спектром сюръективности таких неприятностей не бывает:

Предложение 3. *Аппроксимативный точечный спектр $\sigma_{ap}(T)$ оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ замкнут и содержит границу спектра $\partial\sigma(T)$. То же самое верно и для спектра сюръективности $\sigma_{su}(T)$. Как следствие, $\sigma_{ap}(T)$ и $\sigma_{su}(T)$ — непустые компактные подмножества в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. (Набросок). Вначале сделайте следующие упражнения:

Упражнение 4. 1) Множество всех топологически инъективных операторов открыто в $\mathscr{B}(E)$.

2) $\sigma_{ap}(T)$ замкнут.

Упражнение 5. Пусть A — унитальная банахова алгебра.

1) Если $a \in A$ обратим, и $\|b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, то $a - b$ обратим.

2) Если $a \in A$ и $\lambda \notin \sigma(a)$, то $\|(a - \lambda 1)^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\rho(\lambda, \sigma(a))}$, где $\rho(\lambda, \sigma(a))$ — расстояние от λ до $\sigma(a)$.

С учетом равенств $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ и $\sigma_{su}(T) = \sigma_{ap}(T^*)$, нам осталось установить, что $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. Возьмем $\lambda \in \partial\sigma(T)$ и выберем последовательность $\{\lambda_n\}$ так, чтобы $\lambda_n \to \lambda$ и $\lambda_n \notin \sigma(T)$ при всех n. Из п.2) упражнения 5 следует, что $\|(T - \lambda_n)^{-1}\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|(T - \lambda_n)^{-1} x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим

$$y_n = \frac{(T - \lambda_n)^{-1} x_n}{\|(T - \lambda_n)^{-1} x_n\|};$$

тогда $\|y_n\| = 1$ и $(T - \lambda_n) y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$(T - \lambda) y_n = (T - \lambda_n) y_n - (\lambda - \lambda_n) y_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Следовательно, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, как и требовалось. □

Упражнение 6. Докажите часть последнего предложения, касающуюся $\sigma_{su}(T)$, не используя при этом результат п.3) упражнения 2.
Указание. Вначале докажите, что множество всех сюръективных операторов открыто в $\mathscr{B}(E)$, и что $\sigma_{ap}(T^*) \subset \sigma_{su}(T)$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор, и $F \subset E$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T (т.е. такое, что $T(F) \subset F$). Тогда ограничение $T|_F$ — оператор в F. Что больше — $\sigma(T|_F)$ или $\sigma(T)$? Несложные примеры (приведите их!) показывают, что в одних случаях $\sigma(T|_F) \subset \sigma(T)$, а в других — наоборот. Напомним, однако, о *полном спектре* $\sigma_f(T)$ (см. лекцию 3), который получается из $\sigma(T)$ «заклеиванием дыр». Оказывается, справедливо

Предложение 4. *Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор, и $F \subset E$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T. Тогда $\sigma(T|_F) \subset \sigma_f(T)$.*

Доказательство. (Набросок). Положим $U = \mathbb{C} \setminus \sigma_f(T)$; из определения $\sigma_f(T)$ следует, что это область (открытое связное множество) в $\mathbb{C}$. Если $\lambda \in U$ и $|\lambda| > \|T\|$, то

$$(T - \lambda \mathbf{1})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1} T)^{-1} = -\sum_n \lambda^{-(n+1)} T^n$$

(см. теорему 1 из лекции 2). Отсюда следует, что для любого $x \in F$ справедливо включение $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1} x \in F$ для всех указанных λ.

Лемма 1 («векторнозначная теорема единственности»). *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — область, E — банахово пространство, $F \subset E$ — замкнутое подпространство, $f\colon U \to E$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(M) \subset F$ для некоторого подмножества $M \subset U$, имеющего предельную точку в U. Тогда $f(U) \subset F$.*

Упражнение 7. Докажите эту лемму.

Чтобы завершить доказательство предложения, остается применить лемму к функции $f(x) = (T - \lambda\mathbf{1})^{-1}x$ (где $x \in F$ — фиксированный вектор). Действительно, тогда $(T - \lambda\mathbf{1})^{-1}x \in F$ уже для всех $\lambda \in U$, поэтому оператор $T|_F - \lambda\mathbf{1}_F$ обратим в $\mathscr{B}(F)$ для всех $\lambda \in U$, т.е. для всех $\lambda \notin \sigma_f(T)$. $\square$

Пример 1. Используя предложение 4, можно получить еще одно (уже третье) доказательство того, что спектр оператора двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(E)$ (где $E \in \{\ell^p, c_0\}$) совпадает с единичной окружностью $\mathbb{T}$. В самом деле, положим

$$F = \{x \in E : x_n = 0\ \forall n \leqslant 0\};$$

тогда $T|_F$ подобен оператору T_r правого сдвига, у которого $\sigma(T_r) = \overline{\mathbb{D}}$ (см. предложение 2 из лекции 4). Поэтому из предложения 4 следует, что $\mathbb{D}$ — это компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_b)$. С другой стороны, T_b — изометрический изоморфизм E на себя, поэтому $\sigma(T_b) \subset \mathbb{T}$ (см. упр. 4 из лекции 3). Сопоставляя последние два утверждения, получаем $\sigma(T_b) = \mathbb{T}$.

Полинормированные пространства.

Многие векторные пространства, встречающиеся в различных областях математики, обладают естественной топологией, которая не задается никакой нормой. Таковы, в частности, многие пространства гладких и голоморфных функций, а также пространства обобщенных функций (т.е. непрерывных функционалов на пространствах гладких функций), играющие важную роль в теории уравнений с частными производными. В теории операторов тоже не удается обойтись одними лишь банаховыми пространствами. Поэтому наша ближайшая цель — познакомиться с некоторыми ненормируемыми пространствами, которые нам вскоре понадобятся.

Определение 3. Функция $\|\cdot\|\colon E \to [0, +\infty)$ на векторном пространстве E называется *полунормой* (или *преднормой*), если она обладает следующими свойствами:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{C},\ x \in E$;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in E$.

Таким образом, полунорма — это «почти норма», только ей разрешается обращаться в нуль на ненулевых векторах.

Определение 4. Векторное пространство E, снабженное семейством полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ (где I — произвольное множество), называется *полинормированным пространством.*

Если E — полинормированное пространство, то на нем можно ввести топологию примерно тем же способом, что и на нормированном пространстве. А именно, для каждых $x \in E$, $\varepsilon > 0$ и $i \in I$ рассмотрим «шар»

$$U_i(x,\varepsilon) = \{y \in E : \|x - y\|_i < \varepsilon\}. \tag{1}$$

Определение 5. Самая слабая топология на E, в которой открыты все множества вида (1), называется *топологией, порожденной семейством полунорм* $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$.

Замечание 1. Если X — произвольное множество, а P — произвольное семейство его подмножеств, то на X существует слабейшая топология, в которой открыты все множества из P. Базой этой топологии являются всевозможные конечные пересечения множеств из P, а само P при этом называется *предбазой* этой топологии.

Упражнение 8. Топология на E, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$, может быть определена любым из следующих эквивалентных способов:

1) Это — самая слабая топология, инвариантная относительно сдвигов, в которой все полунормы $\|\cdot\|_i$ непрерывны.

2) Базу этой топологии образуют всевозможные множества вида

$$U_{i_1,\dots,i_n}(x,\varepsilon) = \{y \in E : \|x - y\|_{i_k} < \varepsilon \ \forall k = 1,\dots,n\} \tag{2}$$

(где $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $i_1,\dots,i_n \in I$).

Топология, порожденная семейством полунорм, согласована с алгебраической структурой:

Упражнение 9. В полинормированном пространстве E операции сложения $E\times E \to E$ и умножения на скаляр $\mathbb{C} \times E \to E$ непрерывны.

Замечание 2. Векторное пространство, снабженное топологией, в которой операции сложения и умножения на скаляр непрерывны, называется *топологическим векторным пространством.* Естественно спросить, все ли топологические векторные пространства получаются описанным способом, и если не все, то какие именно. Ответ на этот вопрос таков: топология на топологическом векторном пространстве E порождается некоторым семейством полунорм тогда и только тогда, когда оно *локально выпукло.* Это означает, по определению, что в E существует база окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств. Проверьте в качестве несложного упражнения, что все множества вида (2) действительно выпуклы.

Важное свойство локально выпуклых пространств, выделяющее их из класса всех топологических векторных пространств, состоит в том, что на них (при условии хаусдорфовости; см. ниже упр. 11), благодаря теореме Хана-Банаха, имеется достаточно много непрерывных линейных функционалов. Поэтому при изучении локально выпуклых пространств можно использовать соображения двойственности, что часто бывает весьма удобно. С другой стороны, на произвольном топологическом векторном пространстве вообще может не существовать ненулевых непрерывных линейных функционалов, даже если оно хаусдорфово.

Всюду далее $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ — полинормированное пространство, снабженное топологией по указанному выше рецепту.

Упражнение 10. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится к $x \in E \iff \|x - x_n\|_i \to 0$ для всех $i \in I$.

Упражнение 11. E хаусдорфово $\iff$ для каждого ненулевого $x \in E$ найдется $i \in I$ такое, что $\|x\|_i > 0$.

Примеры полинормированных пространств будут у нас появляться по мере необходимости. Вот пример, который нам понадобится в первую очередь:

Пример 2. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $\mathscr{O}(U)$ — пространство голоморфных функций на U. Для каждого компакта $K \subset U$ введем полунорму $\|\cdot\|_K$ на $\mathscr{O}(U)$, полагая $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$. Топология, порожденная этим семейством полунорм, называется *компактно-открытой*. Из упражнения 10 видно, что последовательность f_n сходится к f в этой топологии тогда и только тогда, когда она сходится к f равномерно на каждом компакте в U. Поэтому классическую теорему Рунге об аппроксимации голоморфных функций рациональными можно переформулировать так:

Теорема (Рунге). *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ алгебра $R(U)$ плотна в $\mathscr{O}(U)$.*

Отображения между полинормированными пространствами, уважающие имеющиеся на этих пространствах алгебраическую и топологическую структуры — это, конечно, непрерывные линейные отображения (операторы). Как и в случае операторов между нормированными пространствами, свойство непрерывности можно переформулировать «на языке неравенств»:

Упражнение 12. Пусть $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ и $(F, \{\|\cdot\|_j : j \in J\})$ — полинормированные пространства, $T\colon E \to F$ — линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T непрерывен.

2) Для каждого $j \in J$ найдутся $C > 0$ и конечный набор $i_1, \ldots, i_n \in I$ такие, что $\|Tx\| \leqslant C \max\{\|x\|_{i_1}, \ldots, \|x\|_{i_n}\}$ для всех $x \in E$.

Часто бывает так, что одну и ту же топологию на векторном пространстве можно задать несколькими разными семействами полунорм.

Определение 6. Семейства полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I\}$ и $\{\|\cdot\|_j : j \in J\}$ на векторном пространстве E называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию.

Упражнение 13. Сформулируйте и докажите критерий эквивалентности двух семейств полунорм «на языке неравенств».

Пример 3. Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса R. (При $R = \infty$ мы полагаем $\mathbb{D}_R = \mathbb{C}$). Каждая $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ разлагается в $\mathbb{D}_R$ в ряд Тэйлора: $f(z) = \sum_n c_n z^n$. (Обратите внимание, что он сходится в компактно-открытой топологии на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$, описанной в примере 2.) Для каждого $0 < r < R$ положим $\|f\|_r = \sum_n |c_n| r^n$; очевидно, $\|\cdot\|_r$ — полунорма на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$.

Упражнение 14. Пусть $\{r_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к R. Докажите, что семейства полунорм

$$\{\|\cdot\|_K : K \subset \mathbb{D}_R \text{ — компакт }\}, \quad \{\|\cdot\|_r : 0 < r < R\} \quad \text{и} \quad \{\|\cdot\|_{r_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ эквивалентны.

Из последнего упражнения видно, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$, где $U = \mathbb{D}_R$, может быть задана счетным набором полунорм (кстати, докажите, что это так для любого открытого множества U). А нельзя ли обойтись конечным набором?

Упражнение 15. Хаусдорфово полинормированное пространство $(E, \{\|\cdot\|_i : i \in I\})$ нормируемо $\iff$ существует конечное подмножество $I_0 \subset I$, такое, что система полунорм $\{\|\cdot\|_i : i \in I_0\}$ эквивалентна исходной.

Упражнение 16. Пространство $\mathscr{O}(U)$ ненормируемо.

Замечание 3. Можно показать (мы этим заниматься не будем), что для хаусдорфова E наличие счетного (точнее, не более чем счетного) подмножества $I_0 \subset I$, задающего ту же топологию, эквивалентно *метризуемости* E.

Если на полинормированном пространстве введено умножение, превращающее его в ассоциативную алгебру, то естественно требовать, чтобы умножение было непрерывно. Однако по техническим причинам обычно требуют, чтобы оно было лишь *раздельно непрерывно:*

Определение 7. *Полинормированная алгебра* — это полинормированное пространство A, снабженное структурой алгебры так, что для каждого $a \in A$ операторы

$$L_a \colon A \to A,\ b \mapsto ab \quad \text{и} \quad R_a \colon A \to A,\ b \mapsto ba$$

непрерывны. Если же непрерывно отображение $A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto ab$, то A называется *полинормированной алгеброй с совместно непрерывным умножением.*

Впоследствии нам встретятся примеры полинормированных алгебр, умножение в которых не является совместно непрерывным (так что требование раздельной непрерывности — это вынужденная необходимость). А пока сделайте следующее

Упражнение 17. $\mathscr{O}(U)$ — полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.