Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 6.
Голоморфное функциональное исчисление.

Мы уже знаем, что от любого элемента любой унитальной алгебры можно «брать рациональные функции», определенные на спектре этого элемента (см. лекцию 3). В общем случае, т.е. для произвольной алгебры, никакого более содержательного функционального исчисления построить нельзя. Однако, если A — банахова алгебра, то положение дел меняется: от любого ее элемента можно брать не только рациональные, но и голоморфные функции.

Итак, пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Напомним, что через $\mathscr{O}(U)$ обозначается алгебра голоморфных функций на U, снабженная компактно-открытой топологией. Через $t \in \mathscr{O}(U)$ обозначим функцию $t(z) = z$.

Определение 1. *Голоморфным исчислением* от a на U называется непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$, такой, что $\gamma_h(t) = a$.

Предложение 1. *Предположим, что голоморфное исчисление γ_h от a на U существует. Тогда:*

1) *оно является продолжением рационального (т.е. $\gamma_h|_{R(U)} = \gamma_r$);*
2) *$\sigma(a) \subset U$;*
3) *голоморфное исчисление единственно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения $\gamma_h(t) = a$, а второе — из первого и из свойств рационального исчисления. Наконец, утверждение о единственности вытекает из непрерывности γ_h и теоремы Рунге. □

Построить голоморфное исчисление проще всего в случае, когда U — круг с центром в нуле или вся комплексная плоскость.

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса R, содержащий спектр $\sigma(a)$ элемента $a \in A$. (При $R = \infty$ мы полагаем $\mathbb{D}_R = \mathbb{C}$). Тогда голоморфное исчисление от a на $\mathbb{D}_R$ существует и единственно.*

Доказательство. Возьмем произвольную $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ и разложим ее в ряд Тэйлора: $f(z) = \sum_n c_n z^n$. Покажем, что ряд $\sum_n c_n a^n$ сходится в A. Для этого зафиксируем любое ρ так, чтобы $r(a) < \rho < R$; тогда из формулы спектрального радиуса (см. лекцию 3) следует, что найдется $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\|a^n\|^{1/n} < \rho$ при $n > N$. Следовательно, $C := \sup_n \|a^n\|/\rho^n < \infty$. Поэтому

$$\sum_n |c_n| \|a^n\| \leqslant C \sum_n |c_n| \rho^n, \tag{1}$$

и ряд $\sum_n c_n a^n$ абсолютно сходится. Обозначим его сумму через $\gamma_h(f)$. Простые вычисления со степенными рядами показывают, что построенное отображение $\gamma_h \colon \mathscr{O}(\mathbb{D}_R) \to A$ является унитальным гомоморфизмом, причем $\gamma_h(t) = a$. Наконец, из (1) следует, что $\|\gamma_h(f)\| \leqslant C\|f\|_\rho$ для всех $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ (см. пример 3 из прошлой лекции), поэтому γ_h непрерывен. □

Из предыдущего предложения следует, в частности, что от любого элемента унитальной банаховой алгебры можно «брать целые функции». В частности, для любого $a \in A$ определена экспонента $\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$.

Если $U \subset \mathbb{C}$ — произвольное открытое множество, содержащее $\sigma(a)$, то строить голоморфное исчисление от a на U тем же способом, что и выше, не получается: ведь не любая же голоморфная в U функция разлагается в ряд Тэйлора на U. С другой стороны, для голоморфных функций в U существует удобное представление в виде интеграла Коши.

Напоминание 1. Если $V \subset U$ — ограниченное открытое подмножество, такое, что $\overline{V} \subset U$, и граница ∂V состоит из конечного числа гладких кривых, то для любой $f \in \mathscr{O}(U)$ и любого $z \in V$ справедлива *интегральная формула Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2}$$

(интегрирование по ∂V ведется, как положено, с учетом ориентации).

С учетом формулы Коши, естественно попытаться построить голоморфное исчисление от элемента $a \in A$ следующим образом: подберем V так, чтобы $\sigma(a) \subset V \subset \overline{V} \subset U$, подставим a вместо z в правую часть формулы (2) и возьмем получившееся выражение в качестве *определения* элемента $f(a) = \gamma_h(f)$. Конечно, чтобы придать этому определению смысл, нужно сперва договориться, что называть интегралом от функции со значениями в банаховом пространстве.

Интегрирование векторнозначных функций. Пусть E — банахово пространство, $f\colon [a,b] \to E$ — функция. Интеграл Римана $\int_a^b f(t)\, dt$ можно определить, как и для скалярных функций, как предел интегральных сумм. А можно сделать еще проще:

Определение 2. Элемент $x \in E$ называется *интегралом* от f по $[a,b]$ (и обозначается через $\int_a^b f(t)\, dt$), если для любого $\omega \in E^*$ функция $\omega \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ интегрируема по Риману, и $\omega(x) = \int_a^b \omega(f(t))\, dt$.

Конечно, если интеграл от f существует, то он — единственный (почему?).

Упражнение 1. 1) Если $f\colon [a,b] \to E$ непрерывна, то она интегрируема, и

$$\Big\| \int_a^b f(t)\, dt \Big\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\, dt \leqslant \|f\|_\infty (b-a),$$

где $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.

2) Если $T \in \mathscr{B}(E,F)$, то $T\Big(\int_a^b f(t)\, dt\Big) = \int_a^b T(f(t))\, dt$ для любой непрерывной функции $f\colon [a,b] \to E$.

Определение 3. Пусть Γ — гладкая ориентированная кривая в $\mathbb{C}$, параметризованная при помощи отображения $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ класса C^1. Для произвольной непрерывной функции $f\colon \Gamma \to E$ положим по определению $\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$.

Как и для скалярных функций, интеграл от f по кусочно гладкой кривой определяется как сумма интегралов по ее «гладким кускам». Наконец, если $V \subset \mathbb{C}$ — ограниченное открытое множество, граница ∂V которого состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, то интеграл от f по ∂V определяется как сумма интегралов по этим кривым, ориентированным согласованно с ориентацией V.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее $\sigma(a)$. Тогда существует единственное голоморфное исчисление $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$ от a на U.*

Доказательство. Выберем открытое ограниченное множество V с границей ∂V, состоящей из конечного числа кусочно гладких кривых, так, чтобы $\sigma(a) \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Для каждой $f \in \mathscr{O}(U)$ положим

$$\gamma_h(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1} d\zeta.$$

Очевидно, отображение $\gamma_h \colon \mathscr{O}(U) \to A$ корректно определено (поскольку под знаком интеграла стоит непрерывная функция) и линейно. Кроме того, легко видеть (проверьте!), что существует $C > 0$, такое, что $\|\gamma_h(f)\| \leqslant C\|f\|_{\partial V}$ для любой $f \in \mathscr{O}(U)$. Следовательно, γ_h непрерывно.

Таким образом, нам остается показать, что γ_h — унитальный гомоморфизм, и что $\gamma_h(t) = a$. Заметим, что для этого достаточно проверить два тождества:

(i) $\gamma_h(1) = 1$;
(ii) $\gamma_h((t-\lambda)f) = (a - \lambda 1)\gamma_h(f)$ для всех $f \in \mathscr{O}(U)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

В самом деле, из (i) и (ii) по индукции легко следует, что $\gamma_h(f) = f(a)$ для любого многочлена f; в частности, $\gamma_h(t) = a$. Далее, если $\lambda \notin U$, то $(a-\lambda 1)^n \gamma_h((t-\lambda)^{-n}) = \gamma_h(1) = 1$, поэтому $\gamma_h((t-\lambda)^{-n}) = (a-\lambda 1)^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Разлагая произвольную рациональную функцию $f \in R(U)$ в сумму простейших дробей, мы видим, что γ_h совпадает на $R(U)$ с рациональным исчислением γ_r; в частности, $\gamma_h|_{R(U)}$ — гомоморфизм. Отсюда, с учетом теоремы Рунге и совместной непрерывности умножения в $\mathscr{O}(U)$ и A, следует, что γ_h — гомоморфизм. Действительно, пусть $f, g \in \mathscr{O}(U)$, и пусть $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — последовательности в $R(U)$, сходящиеся к f и g соответственно. Тогда $f_n g_n \to fg$ в $\mathscr{O}(U)$ и $\gamma_h(f_n)\gamma_h(g_n) \to \gamma_h(f)\gamma_h(g)$ в A, поэтому

$$\gamma_h(fg) = \lim_n \gamma_h(f_n g_n) = \lim_n \gamma_h(f_n)\gamma_h(g_n) = \gamma_h(f)\gamma_h(g),$$

так что γ_h — гомоморфизм. Итак, нам остается проверить выполнение условий (i) и (ii).

Для проверки (i) фиксируем произвольный функционал $\omega \in A^*$ и возьмем $R > 0$, такое, что $R > \|a\|$ и $\overline{V} \subset \mathbb{D}_R$. Функция $\zeta \mapsto \omega((\zeta 1 - a)^{-1})$ голоморфна в окрестности области $\mathbb{D}_R \setminus \overline{V}$, поэтому ее интеграл по ориентированной границе этой области равен нулю. Отсюда следует, что

$$\omega(\gamma_h(1)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \omega((\zeta 1 - a)^{-1})\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}_R} \omega((\zeta 1 - a)^{-1})\, d\zeta. \tag{3}$$

С другой стороны, при $\zeta \in \partial\mathbb{D}_R$ мы имеем

$$(\zeta 1 - a)^{-1} = \zeta^{-1}(1 - \zeta^{-1}a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1}a^n$$

(см. теорему 1 из лекции 2), причем ряд сходится равномерно на $\partial\mathbb{D}_R$. Поэтому цепочку равенств (3) можно продолжить следующим образом:

$$\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(a^n)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}_R} \zeta^{-n-1}d\zeta = \omega(1).$$

Ввиду произвольности $\omega \in A^*$, это дает равенство (i).

Теперь проверим (ii):

$$\begin{aligned}
&\gamma_h((t-\lambda)f) - (a-\lambda 1)\gamma_h(f) = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}(\zeta-\lambda)f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1}d\zeta - (a-\lambda 1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)^{-1}d\zeta = \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)\big[(\zeta-\lambda)1 - (a-\lambda 1)\big](\zeta 1 - a)^{-1}d\zeta = \\
&\qquad\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)(\zeta 1 - a)(\zeta 1 - a)^{-1}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V} f(\zeta)\,d\zeta\cdot 1 = 0,
\end{aligned}$$

поскольку f голоморфна в U. Таким образом, (ii) доказано. Как уже было замечено выше, отсюда следует, что γ_h — гомоморфизм. □

Голоморфные исчисления на разных открытых множествах согласованы:

Упражнение 2. Пусть $\sigma(a) \subset V \subset U$, где U, V — открытые подмножества $\mathbb{C}$. Обозначим через $r_{UV} \colon \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(V)$ гомоморфизм, сопоставляющий каждой голоморфной функции в U ее ограничение на V. Пусть γ_h^U и γ_h^V — голоморфные исчисления от a на U и V соответственно. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(U) \arrow[d, "r_{UV}"'] \arrow[dr, "\gamma_h^U"] & \\
\mathscr{O}(V) \arrow[r, "\gamma_h^V"'] & A
\end{tikzcd}$$

Поскольку голоморфное исчисление является продолжением рационального и не зависит от выбора открытого множества, содержащего спектр, мы вправе вместо $\gamma_h(f)$ писать просто $f(a)$ для любой голоморфной функции f, определенной в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$.

Довольно часто голоморфное исчисление от того или иного элемента какой-нибудь «классической» банаховой алгебры удается описать «в явном виде», т.е. не прибегая к контурному интегрированию. Чтобы в этом убедиться, сделайте следующее

Упражнение 3. Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, f — голоморфная функция, определенная в окрестности $\sigma(a)$. В каждом из перечисленных ниже случаев укажите, что такое $f(a)$:

1) $A = C(\Omega)$, $a \in A$ — любой элемент.
2) $A = \ell^\infty$, $a \in A$ — любой элемент.
3) $A = L^\infty(X, \mu)$, $a \in A$ — любой элемент.
4) $A = \mathscr{B}(\ell^p)$ или $\mathscr{B}(c_0)$, $a = M_\lambda$ — диагональный оператор.
5) $A = \mathscr{B}(L^p(X, \mu))$, $a = M_f$ — оператор умножения.
6) $A = \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$, $a = T_b$ — оператор двустороннего сдвига.
7) $A = \mathscr{B}(\ell^2)$, $a = T_r$ — оператор правого сдвига.

Вместо того, чтобы говорить о «голоморфном исчислении в произвольной окрестности спектра», удобно говорить о «голоморфном исчислении на спектре». Для этого нам понадобится еще одна полинормированная алгебра, а именно, *алгебра ростков голоморфных функций*. Определяется она следующим образом.

Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$. Рассмотрим множество всех пар (U, f), где $U \supset K$ — открытое множество, и $f \in \mathscr{O}(U)$. На этом множестве введем отношение эквивалентности, полагая $(U, f) \sim (V, g)$, если существует окрестность $W \supset K$, такая, что $W \subset U \cap V$ и $f|_W = g|_W$. Класс эквивалентности называется *ростком* голоморфной функции на K, а множество всех ростков обозначается через $\mathscr{O}(K)$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{O}(K)$ становится алгеброй, если определить алгебраические операции над ростками как поточечные операции над их представителями.

Как и в случае алгебры рациональных функций $R(M)$ (см. лекцию 3), каждому ростку $f \in \mathscr{O}(K)$ можно приписать значение $f(z)$ в произвольной точке $z \in K$, взяв в качестве $f(z)$ значение в точке z любого его представителя. Получаем функцию $\tilde{f}\colon K \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) = f(z)$. Отображение $\mathscr{O}(K) \to \mathbb{C}^K$, $f \mapsto \tilde{f}$ является, очевидно, унитальным гомоморфизмом. Отметим, что он инъективен тогда и только тогда, когда K не содержит изолированных точек (почему?). Тем не менее, этот гомоморфизм всегда сохраняет спектр (ср. замечание 3 из лекции 3):

Упражнение 4. 1) $f \in \mathscr{O}(K)$ обратим $\iff$ $\tilde{f} \in \mathbb{C}^K$ обратим, т.е. $f(z) \neq 0$ для любого $z \in K$.

2) $\sigma_{\mathscr{O}(K)}(f) = \sigma_{\mathbb{C}^K}(\tilde{f}) = f(K)$ для любой $f \in \mathscr{O}(K)$.

Топология на $\mathscr{O}(K)$ вводится следующим образом. Для каждой окрестности U компакта K обозначим через $r_{UK}\colon \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(K)$ гомоморфизм «ограничения», определяемый очевидным образом. Назовем полунорму $\|\cdot\|$ на $\mathscr{O}(K)$ *допустимой*, если для любой окрестности $U \supset K$ полунорма $f \mapsto \|r_{UK}(f)\|$ непрерывна на $\mathscr{O}(U)$. Превратим $\mathscr{O}(K)$ в полинормированное пространство, снабдив его семейством всех допустимых полунорм.

Замечание 1. Указанный способ введения топологии встречается довольно часто; по-научному он называется «индуктивный предел». При этом используется следующее обозначение: $\mathscr{O}(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathscr{O}(U)$. При помощи той же конструкции вводится топология, например, на пространстве $\mathscr{D}$ гладких функций на прямой с компактным носителем, играющем важную роль в теории обобщенных функций.

Упражнение 5. Пусть E — полинормированное пространство. Линейный оператор $T\colon \mathscr{O}(K) \to E$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U \supset K$ оператор $T \circ r_{UK}\colon \mathscr{O}(U) \to E$ непрерывен.

На самом деле, указанное в последнем упражнении свойство полностью характеризует топологию на $\mathscr{O}(K)$:

Упражнение 6. Пусть $\mathscr{O}(K)$ снабжено каким-либо семейством полунорм, таким образом, что выполнено свойство, указанное в предыдущем упражнении. Тогда топология, порожденная этим семейством, совпадает с топологией, порожденной семейством всех допустимых полунорм на $\mathscr{O}(K)$.

Упражнение 7*. $\mathscr{O}(K)$ — хаусдорфова полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.

Предложение 3. *Пусть A — унитальная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент. Существует единственный непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma_h^\sigma \colon \mathscr{O}(\sigma(a)) \to A$, такой, что $\gamma_h^\sigma(t) = a$.*

Доказательство. Положим $K = \sigma(a)$. Пусть $f \in \mathscr{O}(K)$ — произвольный росток, и пусть $g \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset K$) — некоторый его представитель. Положим по определению $\gamma_h^\sigma(f) = \gamma_h^U(g)$. Из упражнения 2 легко выводится, что γ_h^σ — корректно определенный унитальный гомоморфизм, причем $\gamma_h^\sigma(t) = a$, и $\gamma_h^\sigma \circ r_{UK} = \gamma_h^U$ для любой окрестности $U \supset K$. Непрерывность γ_h^σ следует из упражнения 5, а единственность — из единственности голоморфного исчисления в окрестности спектра (см. предложение 1, п.3). $\square$

Определение 4. Гомоморфизм $\gamma_h^\sigma \colon \mathscr{O}(\sigma(a)) \to A$, описанный в предыдущем предложении, называется *голоморфным исчислением на спектре* от элемента $a \in A$.

В дальнейшем вместо $\gamma_h^\sigma(f)$ мы будем, когда это удобно, писать $f(a)$.

Теорема 2 (об отображении спектра). *Для любой $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ справедливо равенство $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.*

С учетом упражнения 4, эту теорему можно переформулировать так:

Теорема 2′. Гомоморфизм $\gamma_h^\sigma \colon \mathscr{O}(\sigma(a)) \to A$ сохраняет спектр.

Доказательство. Достаточно доказать, что γ_h^σ переводит необратимые элементы в необратимые. Пусть $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ необратим; тогда $f(\lambda) = 0$ в некоторой точке $\lambda \in \sigma(a)$. Из свойств голоморфных функций следует, что $f = (t-\lambda)g$ для некоторого $g \in \mathscr{O}(\sigma(a))$. Следовательно, $\gamma_h^\sigma(f) = (a - \lambda 1)\gamma_h^\sigma(g)$. Но $a - \lambda 1$ необратим, поэтому и $\gamma_h^\sigma(f)$ необратим (см. лемму 1 из лекции 3). $\square$

Следствие 1. *Для любого $a \in A$ элемент* $\exp(a)$ *обратим.*

Естественно поинтересоваться, справедлив ли аналог теоремы об отображении спектра для его частей:

Упражнение 8. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — ограниченный оператор. Верно ли равенство $\sigma_p(f(T)) = f(\sigma_p(T))$, если

1) $f \in \mathbb{C}[t]$;
2) $f \in R(M)$ (где $M \supset \sigma(T)$);
3) $f \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset \sigma(T)$ — область);
4) $f \in \mathscr{O}(U)$ (где $U \supset \sigma(T)$ — открытое множество).

Тот же вопрос для $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$, $\sigma_{ap}(T)$, $\sigma_{su}(T)$, $\sigma_{com}(T)$.

Вот еще два важных свойства голоморфного исчисления:

Упражнение 9 (перестановочность с гомоморфизмами). Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный гомоморфизм банаховых алгебр, и пусть $a \in A$. Тогда $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любой $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$.

Упражнение 10 (теорема о композиции). Пусть $a \in A$, $f \in \mathscr{O}(\sigma(a))$ и $g \in \mathscr{O}(\sigma(f(a)))$. Тогда $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Обсудим теперь некоторые полезные применения голоморфного исчисления.

Упражнение 11. Пусть $\sigma(a)$ не пересекается с некоторым лучом, выходящим из начала координат. Тогда
1) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $b \in A$ такой, что $b^n = a$;
2) существует $b \in A$ такой, что $\exp(b) = a$.

Поскольку спектр любой $n \times n$-матрицы конечен, мы получаем

Следствие 2. *Если $a \in M_n(\mathbb{C})$ — обратимая матрица, то $a = \exp(b)$ для некоторой $b \in M_n(\mathbb{C})$. Иными словами, отображение $\exp\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{C}))$ — сюръекция.*

Упражнение 12. Справедлив ли аналог предыдущего утверждения в алгебрах $\mathscr{B}(E)$? $C[a,b]$? $C(\mathbb{T})$? ℓ^∞? $L^\infty(X,\mu)$?

Чтобы получить более подробную информацию об образе экспоненциального отображения $\exp\colon A \to \mathrm{Inv}(A)$, обозначим через $\mathrm{Inv}_0(A)$ связную компоненту единицы группы $\mathrm{Inv}(A)$ и заметим, что $\exp(A) \subset \mathrm{Inv}_0(A)$ ввиду связности A.

Упражнение 13. Пусть A — унитальная банахова алгебра.
1) $\mathrm{Inv}_0(A)$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Inv}(A)$.
2) $\exp(A)$ порождает $\mathrm{Inv}_0(A)$ как группу.
3) $\mathrm{Inv}_0(A) = \exp(A)$, если A коммутативна.

Упражнение 14*. *(Для любителей топологии).* Пусть $A = C(\Omega)$ — алгебра непрерывных функций на компакте Ω. Докажите, что факторгруппа $\mathrm{Inv}(A)/\exp(A)$ изоморфна первой группе когомологий $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$.

О неаналитических функциональных исчислениях.

Теорема о голоморфном исчислении применима, в частности, к алгебре $\mathscr{B}(E)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве. Таким образом, полиномиальное исчисление $\gamma_p\colon \mathbb{C}[t] \to \mathscr{B}(E)$ от любого оператора $T \in \mathscr{B}(E)$ продолжается до рационального $\gamma_r\colon R(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(E)$, а рациональное — до голоморфного $\gamma_h\colon \mathscr{O}(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(E)$. Естественно спросить, нельзя ли расширить голоморфное исчисление на какую-нибудь бо́льшую алгебру, состоящую из функций (или ростков функций) на спектре:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[t] \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma_p"'] & R(\sigma(T)) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_r"'] & \mathscr{O}(\sigma(T)) \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma_h"] & A \arrow[dll, dashed, "?"] \\
 & \mathscr{B}(E) & &
\end{tikzcd}$$

С точки зрения теории операторов, желательно, чтобы A была достаточно большой для того, чтобы допускать разбиения единицы. Это позволило бы лучше понять «устройство» оператора T, в частности, построить для него большое семейство инвариантных подпространств.

Для некоторых операторов такое исчисление действительно существует:

Упражнение 15. *("Научно-исследовательское").* На какие функциональные алгебры можно продолжить голоморфное исчисление от следующих операторов?

1) диагональный оператор $M_\lambda \in \mathscr{B}(\ell^p)$;
2) оператор умножения $M_f \in \mathscr{B}(L^p(X,\mu))$;
3) оператор двустороннего сдвига $T_b \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Пожалуй, «самая маленькая» из «классических» функциональных алгебр на каком-либо открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, допускающая разбиения единицы — это алгебра гладких функций $C^\infty(U)$. На этой алгебре есть каноническая топология, задающая равномерную сходимость на компактах со всеми частными производными. Эту топологию можно описать при помощи полунорм следующим образом.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Для каждого набора (мультииндекса) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ и $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Для каждого компакта $K \subset U$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ введем полунорму $\|\cdot\|_{K,\alpha}$ на $C^\infty(U)$, полагая $\|f\|_{K,\alpha} = \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|$. Система всех полунорм указанного вида превращает $C^\infty(U)$ в полинормированное пространство. Очевидно, оно хаусдорфово (почему?).

Упражнение 16. 1) $C^\infty(U)$ — полинормированная алгебра с совместно непрерывным умножением.

2) Если $U \subset \mathbb{C}$, то компактно-открытая топология на алгебре голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.

Следующее определение принадлежит Ч. Фойяшу.

Определение 5. Оператор $T \in \mathscr{B}(E)$ называется *обобщенным скалярным*, если существует непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma\colon C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathscr{B}(E)$ такой, что $\gamma(t) = T$ (где, как обычно, $t(z) = z$ — «независимая переменная»).

Замечание 2. Раз уж есть обобщенные скалярные операторы, то, конечно, есть и «просто» скалярные. Но определяются они несколько сложнее, и их мы рассматривать пока не будем.

Упражнение 17. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — обобщенный скалярный оператор. Верно ли, что гомоморфизм γ из предыдущего определения — единственный?

Приятное свойство обобщенных скалярных операторов состоит в том, что их поведение можно «локализовать»:

Упражнение 18. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — обобщенный скалярный оператор. Тогда для любого покрытия $\mathbb{C} = U \cup V$ двумя открытыми множествами U, V существуют замкнутые T-инвариантные подпространства $F, G \subset E$ такие, что $\sigma(T|_F) \subset U$, $\sigma(T|_G) \subset V$ и $F + G = E$.
Указание. Воспользуйтесь разбиением единицы, подчиненным этому покрытию.

Замечание 3. Операторы, обладающие свойством, указанным в предыдущем упражнении, называются *разложимыми* (по Фойяшу).

Вот простейший пример:

Упражнение 19. Любой оператор в конечномерном пространстве — обобщенный скалярный.

Для следующего примера нам понадобится алгебра $C^\infty(\mathbb{T})$ гладких функций на единичной окружности $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$. Топология на этой алгебре вводится при помощи системы полунорм $\|f\|_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\frac{d^n}{dt^n} f(e^{it})|$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Нетрудно проверить (проверьте!), что гомоморфизм ограничения $C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{T})$, $f \mapsto f|_{\mathbb{T}}$ непрерывен.

Упражнение 20. Пусть $T \in \mathscr{B}(E)$ — сюръективный изометрический оператор. Тогда существует непрерывный унитальный гомоморфизм $\gamma\colon C^\infty(\mathbb{T}) \to \mathscr{B}(E)$, такой, что $\gamma(t) = T$. Как следствие, T — обобщенный скалярный.
Указание. Любая функция $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ разлагается в ряд Фурье по степеням независимой переменной t.

А вот и контрпример:

Упражнение 21*. Операторы правого и левого сдвига в ℓ^2 не являются обобщенными скалярными.