Спектральная теория и функциональные исчисления
для линейных операторов

Лекция 7.
Спектр и преобразование Гельфанда коммутативных банаховых алгебр.

На прошлой лекции мы убедились, что любой ограниченный оператор обладает голоморфным исчислением в произвольной окрестности спектра. Для некоторых классов операторов удается добиться большего и научиться применять к ним не только голоморфные, но и гладкие, непрерывные, а иногда и некоторые разрывные функции (см. упр. 15 с прошлой лекции). В ближайшем будущем мы познакомимся с несколькими важными результатами о существовании неаналитических функциональных исчислений для «хороших» операторов. Для этого нам придется на время отвлечься от операторов и поговорить об алгебрах, состоящих из функций.

Преобразование Гельфанда, о котором сегодня пойдет речь — это некий универсальный способ «превратить» коммутативную банахову алгебру в алгебру, состоящую из непрерывных функций на некотором компакте.

Итак, пусть A — (пока произвольная) унитальная алгебра.

Определение 1. Левый идеал $I \subset A$ называется *максимальным*, если он собственный (т.е. $I \neq A$) и не содержится ни в каком другом собственном левом идеале.

Предложение 1. *Любой левый идеал $I \subset A$ содержится в некотором максимальном.*

Доказательство. Рассмотрим множество M, состоящее из всевозможных собственных левых идеалов в A, содержащих I. Это множество (частично) упорядочено по включению: $J_1 \prec J_2$, если $J_1 \subset J_2$. Легко проверить, что оно удовлетворяет условиям леммы Цорна. В самом деле, пусть $C \subset M$ — линейно упорядоченное подмножество; тогда, очевидно, $J = \bigcup\{K : K \in C\}$ — левый идеал в A. Поскольку $1 \notin K$ для всех $K \in C$, то и $1 \notin J$, а, значит, J — собственный идеал. Следовательно, J — верхняя грань для C. Таким образом, условия леммы Цорна выполнены, и в M есть максимальный элемент. Это и есть максимальный идеал, содержащий I. □

Замечание 1. Для неунитальных алгебр указанное свойство, вообще говоря, не выполняется (попробуйте привести пример). Ситуацию удается исправить, если рассматривать не все, а только так называемые *модулярные* идеалы. Нам же для наших целей вполне хватит и унитальных алгебр.

Предложение 2. *Пусть A — унитальная банахова алгебра. Тогда любой максимальный левый идеал в A замкнут.*

Доказательство. Если $I \subset A$ — левый идеал, то и его замыкание $\overline{I}$ — тоже левый идеал. Поэтому, если I максимален и $I \neq \overline{I}$, то $\overline{I} = A$. Это значит, что I пересекается с любым непустым открытым подмножеством в A, в частности, с множеством $\mathrm{Inv}(A)$ всех обратимых элементов (см. теорему 1 из лекции 2). Отсюда $I = A$. Противоречие. □

Упражнение 1. Верно ли предыдущее утверждение в алгебрах $\mathscr{O}(U)$? $C^\infty(U)$? $\mathscr{O}(K)$?

Разумеется, все, что говорилось выше, переносится на правые идеалы и на двусторонние идеалы.

Упражнение 2. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. Тогда идеал $I \subset A$ — максимальный $\iff$ факторалгебра A/I — поле.

Начиная с этого момента и до конца лекции мы будем рассматривать только коммутативные алгебры. Каждой коммутативной унитальной алгебре A можно сопоставить два важных множества:

Определение 2. *Максимальным спектром* (далее — просто спектром) A называется множество $\Omega(A)$ всех ее максимальных идеалов. *Пространством характеров* A называется множество $\mathscr{X}(A)$ всех ее ненулевых характеров.

Между $\Omega(A)$ и $\mathscr{X}(A)$ имеется тесная взаимосвязь. А именно, рассмотрим отображение $\varkappa\colon \mathscr{X}(A) \to \Omega(A)$, $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$.

Упражнение 3. Отображение $\varkappa$ инъективно.

Часто $\varkappa$ оказывается биекцией:

Упражнение 4. Пусть $A = \mathbb{C}[t]$ — алгебра многочленов. Каждой точке $z \in \mathbb{C}$ сопоставим «вычисляющий» характер $\delta_z \in \mathscr{X}(A)$, $\delta_z(f) = f(z)$. Докажите, что полученное отображение $\delta\colon \mathbb{C} \to \mathscr{X}(A)$ и отображение $\varkappa$ — биекции.

Впрочем, «часто» — это еще не «всегда»:

Упражнение 5. 1) Придумайте пример коммутативной унитальной алгебры A, для которой $\varkappa$ — не биекция.

2) Опишите $\mathscr{X}(A)$, $\Omega(A)$ и $\varkappa$ для алгебр $\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{C}[[t]]$, $R(M)$, $C^\infty(\mathbb{T})$.

3)* Сделайте то же самое для алгебры $\mathscr{O}(K)$.

4) Опишите $\mathscr{X}(A)$ для алгебр $\mathscr{O}(U)$ и $C^\infty(U)$.

А теперь от алгебр, не снабженных топологией (или снабженных ненормируемой топологией) перейдем к банаховым алгебрам.

Предложение 3. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Тогда отображение $\varkappa\colon \mathscr{X}(A) \to \Omega(A)$, $\chi \mapsto \operatorname{Ker}\chi$ — биекция.*

Доказательство. Пусть $I \in \Omega(A)$ — максимальный идеал. Ввиду предложения 2, он замкнут, поэтому A/I — банахово поле (см. упр. 2). По теореме Гельфанда-Мазура, $A/I \cong \mathbb{C}$. Композиция факторотображения $A \to A/I$ и изоморфизма $A/I \to \mathbb{C}$ — это характер $\chi \in \mathscr{X}(A)$, у которого $\operatorname{Ker}\chi = I$. Следовательно, $\varkappa$ — сюръекция, и остается применить результат упражнения 3. $\square$

Следствие 1. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Элемент $a \in A$ обратим $\iff$ $\chi(a) \neq 0$ для любого $\chi \in \mathscr{X}(A)$.*

Доказательство. ($\Longrightarrow$): тривиально.

($\Longleftarrow$): если $a \in A$ необратим, то главный идеал Aa, будучи собственным, содержится в некотором максимальном идеале I, а он является ядром характера. $\square$

А теперь, как и было обещано, изготовим из A алгебру функций.

Определение 3. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. *Преобразованием Гельфанда* элемента $a \in A$ называется функция $\hat{a}\colon \mathscr{X}(A) \to \mathbb{C}$, определяемая формулой $\hat{a}(x) = x(a)$ для любого $x \in \mathscr{X}(A)$.

Непосредственно проверяется (проверьте), что отображение $A \to \mathbb{C}^{\mathscr{X}(A)}$, $a \mapsto \hat{a}$ — унитальный гомоморфизм алгебр.

Определение 4. Гомоморфизм $\Gamma_A\colon A \to \mathbb{C}^{\mathscr{X}(A)}$, $\Gamma_A(a) = \hat{a}$ называется *преобразованием Гельфанда алгебры* A.

Замечание 2. $\operatorname{Ker}\Gamma_A = \bigcap\{\operatorname{Ker}\chi \,:\, \chi \in \mathscr{X}(A)\}$.

Итак, преобразование Гельфанда сопоставляет каждой унитальной коммутативной алгебре A алгебру функций $\operatorname{Im}\Gamma_A$ на множестве $\mathscr{X}(A)$. Эта конструкция, а также некоторые ее разновидности, оказалась чрезвычайно полезной, и не только в функциональном анализе, но и в других науках. Если «забыть» про ядро преобразования Гельфанда, то можно сформулировать следующий принцип (строго говоря, неверный, но полезный): *коммутативные алгебры — это алгебры функций на некоторых «пространствах»*. Этому утверждению можно придать полную строгость, только для этого нужно заменить $\mathscr{X}(A)$ на некоторое большее множество, а также несколько расширить смысл понятия «функция». Это делается в *теории схем* А. Гротендика.

Развитие и осмысление этих идей привело к появлению новой идеологии — *некоммутативной геометрии*. В широком понимании некоммутативная геометрия — это не область математики, а, скорее, точка зрения, согласно которой произвольные (некоммутативные) алгебры или кольца следует представлять себе как «кольца функций на некоммутативных пространствах»(пространствах, которых на самом деле нет). При этом в зависимости от того, какие именно алгебры и какие их «геометрические» свойства изучаются, возникает целая серия наук — некоммутативная алгебраическая геометрия, некоммутативная дифференциальная геометрия, некоммутативная топология, некоммутативная теория меры ... В некотором смысле к некоммутативной геометрии можно отнести алгебраическую K-теорию и теорию квантовых групп. Мы еще вернемся к этой теме, когда будем говорить о C^*-алгебрах.

Упражнение 6. Опишите преобразование Гельфанда для алгебр $\mathbb{C}[t]$, $\mathbb{C}[[t]]$, $R(M)$, $\mathscr{O}(U)$, $C^\infty(U)$, $\mathscr{O}(K)$.

Отметим, что для произвольной унитальной коммутативной алгебры A пространства $\mathscr{X}(A)$ и $\Omega(A)$ — это «всего лишь» множества. Оказывается, если A — банахова алгебра, то существует канонический способ ввести топологию на множестве $\mathscr{X}(A)$ (которое в этом случае совпадает с $\Omega(A)$; см. предложение 3) так, что преобразования Гельфанда элементов из A будут непрерывными функциями относительно этой топологии. Чтобы описать эту топологию, вернемся ненадолго к полинормированным пространствам.

Слабая и слабая* топологии.

Пусть E — банахово пространство. Для каждого функционала $f \in E^*$ введем полунорму $\|\cdot\|_f$ на E, полагая $\|x\|_f = |f(x)|$ для каждого $x \in E$.

Определение 5. Топология на E, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_f : f \in E^*\}$, называется *слабой топологией* на E и обозначается $\sigma(E, E^*)$.

А теперь применим двойственную конструкцию: возьмем вектор $x \in E$ и введем полунорму $\|\cdot\|_x$ на E^* по правилу $\|f\|_x = |f(x)|$ для каждого $f \in E^*$.

Определение 6. Топология на E^*, задаваемая системой полунорм $\{\|\cdot\|_x : x \in E\}$, называется *слабой* топологией* на E^* и обозначается $\sigma(E^*, E)$.

Замечание 3. Отметим, что последовательность $\{x_n\} \subset E$ сходится к некоторому $x \in E$ в топологии $\sigma(E, E^*)$ тогда и только тогда, когда $f(x_n) \to f(x)$ для любого $f \in E^*$ (см. упр. 10 из лекции 5). В этом случае говорят, что $\{x_n\}$ *слабо сходится* к x. Аналогично, последовательность $\{f_n\} \subset E^*$ сходится к некоторому $f \in E^*$ в топологии $\sigma(E^*, E)$ тогда и только тогда, когда $f_n(x) \to f(x)$ для любого $x \in E$.

Упражнение 7. Топологии $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ хаусдорфовы.

Следующее упражнение объясняет, почему слабые топологии так называются:

Упражнение 8. 1) Слабая топология $\sigma(E, E^*)$ не сильнее, чем исходная топология на E, и совпадает с ней при $\dim E < \infty$.

2) Слабая* топология $\sigma(E^*, E)$ не сильнее, чем топология на E^*, задаваемая нормой $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$, и совпадает с ней при $\dim E < \infty$.

Более того, справедливо следующее утверждение:

Упражнение 9. Топологии $\sigma(E, E^*)$ и $\sigma(E^*, E)$ ненормируемы, если E бесконечномерно. Как следствие, в этом случае топология $\sigma(E, E^*)$ строго слабее, чем исходная топология на E, а топология $\sigma(E^*, E)$ строго слабее, чем топология на E^*, задаваемая нормой $\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$.

Следующее свойство пригодится нам в дальнейшем.

Упражнение 10. Пусть X — топологическое пространство.

1) Отображение $\varphi\colon X \to (E, \sigma(E, E^*))$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $f \in E^*$ отображение $f \circ \varphi\colon X \to \mathbb{C}$ непрерывно.

2) Отображение $\varphi\colon X \to (E^*, \sigma(E^*, E))$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in E$ отображение $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \varphi(x)(y)$ непрерывно.

Замечание 4. *(Необязательное).* Полезно сравнить результат предыдущего упражнения с упражнением 5 из лекции 6: там имела место «двойственная» ситуация. Дело в том, что слабая и слабая* топологии — это частные случаи так называемой *проективной* топологии, а топология на $\mathscr{O}(K)$ — частный случай *индуктивной* топологии. Более подробно об этом можно прочитать, например, в книжке двух Робертсонов «Топологические векторные пространства».

Итак, слабая топология на E, как правило, слабее, чем исходная. Поэтому и функционалов на E, непрерывных в слабой топологии, должно быть меньше или, по крайней мере, не больше, чем в исходной. Оказывается, их ровно столько же:

Упражнение 11. Линейный функционал $f\colon E \to \mathbb{C}$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в слабой топологии. Иными словами, $\big(E, \sigma(E, E^*)\big)^* = E^*$.

Так что слабая топология хоть и слабее исходной, но «не намного». Вот еще одна иллюстрация того же явления:

Упражнение 12. Линейное подпространство $F \subset E$ замкнуто $\iff$ оно замкнуто в слабой топологии.

Справедливы ли аналогичные утверждения про слабую* топологию? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним некоторые стандартные факты из функционального анализа.

Напоминание 1. *Канонические вложение* $i_E\colon E \to E^{**}$ задается формулой

$$i_E(x) = F_x, \quad \text{где} \quad F_x(f) = f(x) \quad \text{для любого } f \in E^*.$$

Каноническое вложение всегда изометрично. Если оно сюръективно (а, значит, является изометрическим изоморфизмом между E и E^{**}), то E называется *рефлекисивным.*

Примеры-упражнения. 1) Пространства ℓ^p и $L^p(X, \mu)$ рефлексивны при $1 < p < \infty$. Гильбертово пространство рефлексивно,

2) Пространства c_0, ℓ^1, ℓ^∞, $C[a, b]$, $L^1[a, b]$, $L^\infty[a, b]$ нерефлексивны.

Теперь мы можем описать функционалы на E^*, непрерывные в слабой* топологии:

Упражнение 13. Линейный функционал $F\colon E^* \to \mathbb{C}$ непрерывен в слабой* топологии $\iff$ он имеет вид F_x для некоторого (единственного) $x \in E$. Иными словами, $\big(E^*, \sigma(E^*, E)\big)^* = \operatorname{Im} i_E$.

Следствие 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *E рефлексивно.*

2) *Линейный функционал $F\colon E^* \to \mathbb{C}$ непрерывен по норме $\iff$ он непрерывен в слабой* топологии.*

Упражнение 14. E нерефлексивно $\iff$ в E^* существуют замкнутые по норме, но не слабо* замкнутые линейные подпространства.

Вот полезное применение слабой* топологии. Пусть $T \in \mathscr{B}(E, F)$ — ограниченный оператор между банаховыми пространствами. Напомним, что в общем случае утверждения "T инъективен" и "T^* имеет плотный образ" неэквивалентны (см. упр. 2 из лекции 4). Тем не менее,

Упражнение 15. Оператор $T \in \mathscr{B}(E, F)$ инъективен $\iff$ $\operatorname{Im} T^*$ слабо* плотен в E^*.

Пожалуй, наиболее для нас важным свойством слабой* топологии будет следующее:

Теорема 1 (Банах-Алаоглу). *Для любого банахова пространства E замкнутый единичный шар сопряженного пространства $\overline{U}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant 1\}$ компактен в слабой* топологии.*

Доказательство. (Набросок). Рассмотрим множество $\overline{\mathbb{D}}^{\overline{U}_E}$, состоящее из всевозможных отображений из замкнутого единичного шара $\overline{U}_E = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ в замкнутый единичный диск $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$. Это множество — компакт в тихоновской топологии. Рассмотрим отображение $\overline{U}_{E^*} \to \overline{\mathbb{D}}^{\overline{U}_E}$, сопоставляющее каждому функционалу его ограничение на $\overline{U}_E$. Нетрудно проверить (проверьте!), что оно топологически инъективно и имеет замкнутый образ. Следовательно, $\overline{U}_{E^*}$ гомеоморфен замкнутому подмножеству компактного пространства и поэтому компактен. □

Замечание 5. Для сравнения напомним, что единичный шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен в исходной топологии.

Следствие 3. *Замкнутый единичный шар $\overline{U}_{E^*}$ замкнут и в слабой* топологии.*

Упражнение 16. Замкнутый единичный шар $\overline{U}_E \subset E$ компактен в слабой топологии $\sigma(E, E^*)$ тогда и только тогда, когда E рефлексивно.

* * *

Теперь мы в состоянии определить топологию на спектре унитальной коммутативной банаховой алгебры A. Напомним (см. предложение 3), что существует каноническая биекция между пространством (ненулевых) характеров $\mathscr{X}(A)$ и максимальным спектром $\Omega(A)$, которая сопоставляет каждому характеру его ядро. Поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять $\mathscr{X}(A)$ и $\Omega(A)$.

Определение 7. Ограничение слабой* топологии $\sigma(A^*, A)$ на $\mathscr{X}(A) \subset A^*$ называется *гельфандовой топологией* на $\mathscr{X}(A) = \Omega(A)$.

Предложение 4. $\Omega(A)$ — *компакт в гельфандовой топологии.*

Доказательство. Напомним, что $\mathscr{X}(A) \subset \overline{U}_{A^*}$ (см. следствие 2 из лекции 2). Ввиду теоремы Банаха-Алаоглу, нам достаточно доказать замкнутость $\mathscr{X}(A)$ в $\overline{U}_{A^*}$. Возьмем произвольный функционал $f \in \overline{\mathscr{X}(A)}$ (где замыкание берется в слабой* топологии) и покажем, что он — характер. Для этого фиксируем $a, b \in A$ и $\varepsilon > 0$ и подберем $\chi \in \mathscr{X}(A)$ так, чтобы он лежал в слабой* окрестности $U_{a,b,ab}(f, \varepsilon)$ функционала f. Напомним: это означает, что значения f и χ на каждом из элементов a, b и ab отличаются друг от друга менее, чем на ε. Следовательно,

$$\begin{aligned}|f(ab) - f(a)f(b)| \leqslant |f(ab) - \chi(ab)| + |\chi(a)\chi(b) - \chi(a)f(b)| &+ \\ + |\chi(a)f(b) - f(a)f(b)| &< \varepsilon + \|a\|\varepsilon + \|b\|\varepsilon.\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $f(ab) = f(a)f(b)$, т.е. f — характер. Осталось показать, что $f \neq 0$. Для этого подберем $\chi' \in \mathscr{X}(A)$ так, чтобы $|\chi'(1) - f(1)| < 1/2$. Поскольку $\chi'(1) = 1$, отсюда следует, что $f(1) \neq 0$. Следовательно, f — ненулевой характер, т.е. элемент $\mathscr{X}(A)$. □

Итак, топология на $\Omega(A)$ введена. Следующая теорема показывает, что преобразование Гельфанда замечательным образом с ней согласовано:

Теорема 2. *Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра. Справедливы следующие утверждения:*

1) *$\hat{a} \in C(\Omega(A))$ для любого $a \in A$;*
2) *$\Gamma_A \colon A \to C(\Omega(A))$ — унитальный гомоморфизм нормы 1;*
3) *$\|\hat{a}\| = r(a)$ для любого $a \in A$;*
4) *$\sigma_A(a) = \hat{a}(\Omega)$ для любого $a \in A$ (т.е. Γ_A сохраняет спектр);*
5) *$\operatorname{Ker}\Gamma_A = \bigcap\{I : I \in \Omega(A)\} = \{a \in A : \sigma(a) = 0\}$.*

Доказательство. 1) Из определения функции $\hat{a}$ следует, что она является ограничением на $\mathscr{X}(A) \subset A^*$ функционала $F_a = i_A(a) \in A^{**}$, который непрерывен в слабой* топологии (см. упр. 13).

4) Если $a \in A$ необратим, то $\hat{a}(\chi) = \chi(a) = 0$ для некоторого $\chi \in \mathscr{X}(A)$ (см. следствие 1), так что $\hat{a}$ — необратимый элемент в $C(\Omega(A))$. Таким образом, Γ_A переводит необратимые элементы в необратимые, а, значит, сохраняет спектр.

3) Следует непосредственно из 4) и определения sup-нормы на $C(\Omega(A))$.

2) Из 3) следует, что $\|\hat{a}\| = r(a) \leqslant \|a\|$ для любого $a \in A$.

5) Следует из 3), замечания 2 и предложения 3. $\square$

Ядро преобразования Гельфанда, описанное в п.5) предыдущей теоремы, носит специальное название:

Определение 8. Пусть A — унитальная коммутативная алгебра. Ее *радикалом Джекобсона* называется множество $\operatorname{Rad} A = \bigcap\{I : I \in \Omega(A)\}$. Алгебра A называется *полупростой*, если $\operatorname{Rad} A = \{0\}$.

Замечание 6. На самом деле, радикал Джекобсона можно определить для произвольных (неунитальных и некоммутативных) колец. Подробности см., например, в книжке Ламбека «Кольца и модули».

Таким образом, из предыдущей теоремы следует, что каждую полупростую унитальную банахову алгебру можно реализовать как алгебру, состоящую из непрерывных функций на некотором компакте — ее максимальном спектре.

В качестве упражнения докажите еще один результат об «автоматической непрерывности» (ср. следствие 2 из лекции 2):

Упражнение 17. Пусть A и B — унитальные коммутативные банаховы алгебры, причем B полупроста. Тогда любой унитальный гомоморфизм из A в B непрерывен.

Посмотрим теперь, как выглядит спектр и преобразование Гельфанда для некоторых «классических» банаховых алгебр. Начнем с алгебры $C(X)$ непрерывных функций на компакте X. Для этого напомним вначале один стандартный факт из общей топологии, утверждающий, что на любом компакте имеется «достаточно много» непрерывных функций.

Теорема 3. *Пусть X — хаусдорфов компакт. Тогда для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ найдется функция $f \in C(X)$ такая, что $f(x) \neq f(y)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем; отметим, впрочем, что для метризуемых компактов она очевидна: достаточно взять функцию $z \mapsto \rho(x, z)$.

Свойство алгебры $C(X)$, указанное в теореме 3, обычно формулируют так: *алгебра $C(X)$ разделяет точки X.*

Предложение 5. *Пусть X — хаусдорфов компакт, $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на X. Тогда отображение*

$$\delta\colon X \to \Omega(A), \quad x \mapsto \delta_x, \quad \delta_x(f) = f(x)$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. Утверждение об инъективности δ — это переформулировка теоремы 3. Сюръективность вытекает из следующей ключевой леммы:

Лемма 1 («о нулях»). *Пусть $I \subset C(X)$ — собственный идеал. Тогда существует точка $x \in X$ такая, что $f(x) = 0$ для любой $f \in I$.*

Доказательство. Предположим противное; тогда для любого $x \in X$ найдется $f_x \in I$ такая, что $f_x(x) \neq 0$. Ввиду непрерывности f_x, существует окрестность $U_x \ni x$, такая, что $f_x(y) \neq 0$ для любого $y \in U_x$. Пользуясь компактностью X, подберем $x_1, \ldots, x_n \in X$ так, чтобы $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} = X$, и положим $f = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}|^2 = \sum_{i=1}^n \bar{f}_{x_i} f_{x_i}$. Тогда $f \in I$ и $f(x) \neq 0$ ни в одной точке $x \in X$. Таким образом, идеал I содержит обратимый элемент f и поэтому совпадает со всей алгеброй. Противоречие. ☐

Из леммы следует, в частности, что каждый максимальный идеал $I \subset A$ содержится в $\operatorname{Ker} \delta_x$ для некоторого $x \in X$, а, значит, совпадает с $\operatorname{Ker} \delta_x$ ввиду максимальности. Тем самым δ — сюръекция.

Непрерывность δ вытекает из упражнения 10. В самом деле, для любого $f \in A$ отображение $X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \delta(x)(f)$ совпадает с f и потому непрерывно.

Итак, δ — непрерывная биекция между компактными пространствами X и $\Omega(A)$. Следовательно, δ — гомеоморфизм. ☐

Замечание 7. Обратите внимание на сходство предложения 5 и упражнения 4. На самом деле, довольно часто оказывается, что максимальный спектр той или иной алгебры функций на каком-либо множестве X совпадает с X. Из доказательства предложения 5 видно, что для этого нужно: во-первых, алгебра должна разделять точки X, а во-вторых, для нее должен быть справедлив аналог «леммы о нулях». Кстати, эта лемма справедлива и для алгебры многочленов $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ от нескольких переменных; соответствующее утверждение — это слабая форма знаменитой *теоремы Гильберта о нулях* (Nullstellensatz). С ее доказательством (которое заметно сложнее, чем для $C(X)$ или $\mathbb{C}[t]$) можно познакомиться, например, по книжке Рида «Алгебраическая геометрия для всех».