Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Лекция 8. Преобразование Гельфанда: примеры.

В прошлый раз мы познакомились с конструкцией, которая в некотором смысле «превращает» произвольную унитальную коммутативную банахову алгебру в алгебру функций. А именно, каждой такой алгебре A мы сопоставили компактное топологическое пространство $\Omega(A)$ — ее гельфандов спектр, и построили непрерывный гомоморфизм $\Gamma_A \colon A \to C(\Omega(A))$ — преобразование Гельфанда. Ядро преобразования Гельфанда — это в точности радикал Джекобсона $\operatorname{Rad} A$, т.е. пересечение всех максимальных идеалов в A.

Замечание 1. Кстати, вполне может оказаться, что $\operatorname{Rad} A \neq \{0\}$ — возьмите, например, $A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$, и посмотрите на ее спектр и преобразование Гельфанда.

Кроме того, для алгебры непрерывных функций $C(X)$ на компакте X мы описали ее спектр: оказалось, что он совпадает с X. Более точно, отображение $\delta_X \colon X \to \Omega(C(X))$, сопоставляющее точке $x \in X$ «вычисляющий характер» $\delta_{X,x} \colon f \mapsto f(x)$, является гомеоморфизмом.

Опишем теперь преобразование Гельфанда алгебры $C(X)$. Оказывается, при отождествлении X и $\Omega(C(X))$ оно становится тождественным отображением. Чтобы сформулировать это более строго, введем следующие обозначения.

Пусть X и Y — компактные топологические пространства, $\varphi \colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим отображение

$$\varphi^\bullet \colon C(Y) \to C(X), \quad \varphi^\bullet(f) = f \circ \varphi \quad (f \in C(Y)).$$

Легко видеть, что $\varphi^\bullet$ — унитальный гомоморфизм нормы 1. Будем говорить, что гомоморфизм $\varphi^\bullet$ *индуцирован* отображением φ.

Вот некоторые простейшие свойства индуцированных гомоморфизмов:

Предложение 1. 1) *Если $\varphi \colon X \to Y$ и $\psi \colon Y \to Z$ — непрерывные отображения компактных пространств, то $(\psi\varphi)^\bullet = \varphi^\bullet\psi^\bullet$.*

2) $(\mathbf{1}_X)^\bullet = \mathbf{1}_{C(X)}$.

3) *Если φ — гомеоморфизм, то $\varphi^\bullet$ — изометрический изоморфизм.*

Доказательство. Прямая проверка (убедитесь!). □

С помощью понятия индуцированного гомоморфизма легко описать преобразование Гельфанда алгебры $C(X)$:

Предложение 2. *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на X. Тогда преобразование Гельфанда $\Gamma_A \colon A \to C(\Omega(A))$ — изометрический изоморфизм, и обратным к нему является $\delta_X^\bullet$.*

Доказательство. Покажем, что композиция отображений

$$A \xrightarrow{\Gamma_A} C(\Omega(A)) \xrightarrow{\delta_X^\bullet} C(X) \tag{1}$$

— тождественное отображение $A = C(X)$ в себя. В самом деле,

$$[\delta_X^\bullet \Gamma_A(f)](x) = \Gamma_A(f)(\delta_{X,x}) = \delta_{X,x}(f) = f(x)$$

для всех $f \in C(X)$, $x \in X$. Следовательно, $\delta_X^\bullet \Gamma_A = \mathbf{1}_A$. Кроме того, δ_X — гомеоморфизм (см. прошлую лекцию), поэтому $\delta_X^\bullet$ — изометрический изоморфизм (см. предложение 1). Отсюда следует, что Γ_A — тоже изометрический изоморфизм, и $\Gamma_A = (\delta_X^\bullet)^{-1}$. $\square$

Замечание 2. Из доказательства видно, что если A — это какая-либо подалгебра в $A = C(X)$, снабженная не менее сильной нормой, чем равномерная, то композиция $\delta_X^\bullet \Gamma_A$ — это тождественное вложение A в $C(X)$. Поэтому, если δ_X — гомеоморфизм X на $\Omega(A)$ (а в прошлый раз мы выяснили, когда это так), то образ преобразования Гельфанда Γ_A алгебры A — это сама A.

Итак, с алгеброй $C(X)$ все ясно. Чтобы находить спектр и преобразование Гельфанда некоторых других банаховых алгебр, полезно выяснить, как понятие гельфандова спектра связано с понятием спектра элемента алгебры.

Упражнение 1. Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра, порожденная (как банахова алгебра) элементом $a \in A$ (это означает, что A совпадает с замыканием линейной оболочки множества $\{1, a, a^2, \dots\}$). Тогда множество значений функции $\hat{a}\colon \Omega(A) \to \mathbb{C}$ совпадает с $\sigma(a)$, и $\hat{a}$ осуществляет гомеоморфизм $\Omega(A)$ на $\sigma(a)$.

В качестве иллюстрации сделайте следующее

Упражнение 2. Опишите спектр и преобразование Гельфанда алгебр $C^n[a, b]$ и $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

Из приведенных примеров видно, что довольно часто спектр функциональной алгебры совпадает, с точностью до гомеоморфизма, с областью определения функций из алгебры (см. замечание 2). Но иногда область определения приходится немного «подправить»:

Упражнение 3. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт, $\widehat{K}$ — объединение K и всех ограниченных компонент связности его дополнения. Тогда спектр алгебры $\mathscr{P}(K)$ (см. лекцию 2) совпадает с $\widehat{K}$.
Указание. Кроме некоторых стандартных фактов из комплексного анализа, можно воспользоваться, например, векторнозначной теоремой единственности из лекции 5.

В предыдущем примере область определения функций из алгебры пришлось расширить. А иногда ее бывает нужно «склеить»:

Упражнение 4. Пусть A — алгебра всех непрерывных 2π-периодических функций на прямой, снабженная sup-нормой. Опишите $\Omega(A)$.

Замечание 3. На лекции 2 мы сделали следующее неформальное наблюдение: *спектр функции как элемента функциональной алгебры — это множество значений функции на «подправленной» области определения.* Теперь понятно, что это означает: если алгебра A состоит из функций на каком-нибудь множестве X, то спектр функции $a \in A$ совпадает с множеством значений функции $\hat{a}$ на гельфандовом спектре $\Omega(A)$ (см. теорему 2, п.4 из прошлой лекции).

Замечание 4. Спектры алгебр вида $L^\infty(X, \mu)$ — это, как правило, нечто довольно экзотическое. Например, спектр алгебры ℓ^∞ (который, как нетрудно проверить, содержит множество $\mathbb{N}$ с дискретной топологией) совпадает с так называемой *стоун-чеховской компактификацией* $\beta\mathbb{N}$ пространства $\mathbb{N}$.

Еще одно полезное свойство преобразования Гельфанда — его согласованность с голоморфным исчислением:

Упражнение 5. Пусть A — унитальная коммутативная банахова алгебра, $a \in A$ — ее элемент, $U \subset \mathbb{C}$ — окрестность $\sigma(a)$ и $f \in \mathscr{O}(U)$ — голоморфная функция. Тогда $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$.

Категорная интерпретация преобразования Гельфанда.

У понятий гельфандова спектра и преобразования Гельфанда есть одно чрезвычайно важное свойство: они носят *естественный* характер (причем не только в житейском смысле, но и в математическом). Для того, чтобы говорить о «естественных» математических явлениях, существует очень удобный язык — язык *категорий* и *функторов*.

Реклама. Понятия категории и функтора носят фундаментальный общематематический характер и относятся к разряду понятий из серии «Это должен знать каждый» (математик). Они помогают воспринимать математику как единую систему, а не как совокупность изолированных наук.

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathscr{C}$, если:

1) Задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ (элементы которого называются *объектами* $\mathscr{C}$);

2) Для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано множество $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ (элементы которого называются *морфизмами* из X в Y). Вместо $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ часто пишут $\varphi\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{\varphi} Y$;

3) Для каждых $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано отображение
$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y, Z) \times \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Z).$$
Образ пары (ψ, φ) при этом отображении обозначается $\psi \circ \varphi$ и называется *композицией* ψ и φ.

При этом требуется, чтобы закон композиции морфизмов обладал следующими свойствами:

(i) Для любых морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} Z$ и $Z \xrightarrow{\chi} W$ выполнено соотношение $(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi)$;

(ii) Для каждого $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$ существует морфизм $\mathbf{1}_X$ (называемый *локальной единицей* или *тождественным морфизмом*), такой, что для любых $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ выполнено $\varphi \circ \mathbf{1}_X = \varphi$ и $\mathbf{1}_X \circ \psi = \psi$.

Определение 2. Морфизм $\psi\colon Y \to X$ называется *обратным* к $\varphi\colon X \to Y$ (и обозначается через φ^{-1}), если $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_X$ и $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_Y$. Морфизм, обладающий обратным, называется *изоморфизмом.*

Определение 3. Категория $\mathscr{A}$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{B}$, если $\operatorname{Ob} \mathscr{A} \subset \operatorname{Ob} \mathscr{B}$, для любых $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ выполнено $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X,Y) \subset \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X,Y)$, и закон композиции (а также локальные единицы) в $\mathscr{A}$ — те же, что в $\mathscr{B}$. Если, к тому же, $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X,Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, то говорят, что $\mathscr{A}$ — *полная* подкатегория.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Категория множеств $\mathscr{S}et$. Ее объекты — множества, морфизмы — отображения, композиция — обычная композиция отображений, локальная единица — тождественное отображение. Изоморфизмы в $\mathscr{S}et$ — это биективные отображения.

Многие важные категории состоят из «множеств с дополнительной структурой»; в качестве морфизмов при этом берутся те отображения, которые эту структуру сохраняют.

Пример 2. Категория групп $\mathscr{G}r$: объекты — всевозможные группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.

Аналогичным образом строятся и другие алгебраические категории: категория колец, векторных пространств, ассоциативных алгебр, алгебр Ли ... (список продолжите сами).

В топологии — свои категории:

Пример 3. Категория $\mathscr{T}op$: объекты — топологические пространства, морфизмы — непрерывные отображения. Особенно для нас важной будет ее полная подкатегория $\mathscr{C}omp$, объекты которой — компактные хаусдорфовы пространства. Отметим, что изоморфизмы как в $\mathscr{T}op$, так и в $\mathscr{C}omp$ — это в точности гомеоморфизмы.

Пример 4. Одна из основных категорий функционального анализа — категория $\mathscr{B}an$, объекты которой — банаховы пространства, а морфизмы — ограниченные (=непрерывные) линейные операторы. Изоморфизмы в $\mathscr{B}an$ — это *топологические изоморфизмы*, т.е. линейные операторы, являющиеся гомеоморфизмами (ввиду теоремы Банаха, это то же самое, что биективные ограниченные операторы).

Пример 5. Наряду с $\mathscr{B}an$, удобно также рассматривать ее (неполную) подкатегорию $\mathscr{B}an_1$, объекты которой — те же, что и в $\mathscr{B}an$, а морфизмы — линейные *сжатия*, т.е. линейные операторы, норма которых не превосходит 1. Изоморфизмы в $\mathscr{B}an_1$ — это *изометрические изоморфизмы*, т.е. биективные линейные операторы, сохраняющие норму.

Пример 6. Банаховы алгебры и их непрерывные гомоморфизмы также образуют категорию, обозначаемую через $\mathscr{BA}$. Ее подкатегорию, состоящую из унитальных коммутативных банаховых алгебр и непрерывных унитальных гомоморфизмов, мы будем обозначать через $\mathscr{CBA}$.

Пример 7. Приведем теперь пример категории, не являющейся категорией «множеств со структурой». Пусть $\mathscr{C}$ — произвольная категория. *Эндоморфизмом* объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ называется произвольный морфизм $X \to X$. Категория эндоморфизмов $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$ определяется следующим образом: ее объекты — это пары (X, φ), где $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, X)$, а морфизм из (X, φ) в (Y, ψ) — это такой морфизм $u\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{2}$$

коммутативна. Как нетрудно проверить, диаграмма (2) задает изоморфизм в $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$ тогда и только тогда, когда u — изоморфизм в $\mathscr{C}$. В этом случае говорят, что эндоморфизмы φ и ψ *подобны*. В частности, для $\mathscr{C} = \mathscr{B}an$ мы получаем отношение подобия линейных операторов, а для $\mathscr{C} = \mathscr{B}an_1$ — их изометрическую эквивалентность (см. лекцию 4).

Пример 8. Для каждой категории $\mathscr{C}$ ее *дуальная категория* $\mathscr{C}^\circ$ определяется так: $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $\mathbf{h}_{\mathscr{C}^\circ}(X, Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y, X)$. Композиция морфизмов в $\mathscr{C}^\circ$ — это композиция морфизмов в $\mathscr{C}$, взятых в обратном порядке.

В разных областях математики часто возникает понятие «индуцированного отображения». Это происходит в тех ситуациях, когда некоторая общая конструкция определена не только на объектах, но и на морфизмах между ними. Формальное определение таково.

Определение 4. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории. Говорят, что задан *ковариантный функтор* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, если:

1) Каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ сопоставлен объект $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$;

2) Для каждых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ задано отображение $F\colon \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$, такое, что

   (i) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ для любых $\psi\colon X \to Y$ и $\varphi\colon Y \to Z$;

   (ii) $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$ для любого X.

Иногда бывает так, что «индуцированное отображение» $F(\varphi)$ смотрит в противоположном направлении:

Определение 5. *Контравариантный функтор* из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ — это ковариантный функтор из дуальной категории $\mathscr{C}^\circ$ в $\mathscr{D}$.

Чтобы получить прямое определение, нужно в п. 2) из определения ковариантного функтора заменить фигурирующее там отображение на отображение $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(Y),F(X))$, а условие (i) заменить на $F(\varphi\circ\psi) = F(\psi)\circ F(\varphi)$.

Вот простейшее, но очень важное свойство функторов:

Предложение 3. *Если $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — функтор (ковариантный или контравариантный), а φ — изоморфизм в $\mathscr{C}$, то $F(\varphi)$ — изоморфизм в $\mathscr{D}$.*

Функторы встречаются в математике буквально на каждом шагу. Довольно часто взаимосвязи, существующие между различными областями математики, выражаются при помощи того или иного функтора; при этом свойство функторов сохранять изоморфизмы (см. предыдущее предложение) дает удобный способ сводить задачи из одной области математики к задачам из другой области. Это широко используется, например, в алгебраической топологии, которая изучает топологические пространства при помощи разнообразных функторов, действующих из топологических категорий в алгебраические. Более подробно об этом написано во введении к книге Постникова «Основы теории гомотопий».

Из-за недостатка времени и места мы не будем задерживаться на многочисленных примерах функторов; см., например, книгу Гельфанда и Манина «Методы гомологической алгебры», Манина «Лекции по алгебраической геометрии» (часть I, добавление) или Букура и Деляну «Введение в теорию категорий и функторов». Приведем лишь несколько примеров, необходимых нам для дальнейшего.

Пример 9. Контравариантный *функтор сопряжения* $*\colon \mathscr{B}an \to \mathscr{B}an$ сопоставляет каждому банахову пространству E его сопряженное E^*, а каждому ограниченному оператору $T\colon E\to F$ — сопряженный оператор $T^*\colon F^*\to E^*$. Этот же функтор можно рассматривать как функтор из $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{B}an_1$.

А теперь опишем два функтора, имеющие непосредственное отношение к коммутативным банаховым алгебрам. Первый из них уже встречался нам в начале этой лекции.

Пример 10. Контравариантный функтор $C\colon \mathscr{C}omp \to \mathscr{CBA}$ сопоставляет каждому компакту X банахову алгебру $C(X)$, а непрерывному отображению $\varphi\colon X\to Y$ — гомоморфизм $\varphi^\bullet\colon C(Y)\to C(X)$, $f\mapsto f\circ\varphi$ (см. предложение 1).

Пример 11. Контравариантный *функтор спектра* $\Omega\colon \mathscr{CBA} \to \mathscr{C}omp$ сопоставляет каждой унитальной коммутативной банаховой алгебре A ее гельфандов спектр $\Omega(A)$, а каждому унитальному непрерывному гомоморфизму $\psi\colon A\to B$ — непрерывное отображение $\Omega(\psi)\colon \Omega(B)\to\Omega(A)$, переводящее характер $\chi\in\Omega(B)$ в характер $\chi\circ\psi\in\Omega(A)$. Иными словами, $\Omega(\psi)$ — это просто ограничение сопряженного оператора $\psi^*\colon B^*\to A^*$ на $\Omega(B)$.

Упражнение 6. Как $\Omega(\psi)$ действует на максимальные идеалы?

Итак, у нас есть два функтора C и Ω, действующие во встречных направлениях. Мы уже знаем (см. предложение 5 с прошлой лекции), что если подействовать на какой-нибудь компакт X функтором C, а потом применить Ω, то получится, с точностью до гомеоморфизма, исходный компакт X. На самом деле, можно сказать больше: гомеоморфизмы $X\cong\Omega(C(X))$, рассмотренные для всевозможных X, согласованы друг с другом. Чтобы сформулировать это более строго, введем еще одно важное понятие.

Пусть $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ — категории и $F,G\colon \mathscr{C}\to\mathscr{D}$ — ковариантные функторы.

Определение 6. *Естественное преобразование* (или *функторный морфизм*) $\alpha\colon F \to G$ — это семейство морфизмов $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ в $\mathscr{D}$, заданных для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, такое, что для любого морфизма $\varphi\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Если α_X — изоморфизм для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, то α называется *естественной эквивалентностью* (или *функторным изоморфизмом*).

Пример 12. Рассмотрим два ковариантных функтора, действующие в категории $\mathscr{B}an$ банаховых пространств: тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathscr{B}an}$ и функтор «двойного сопряжения» $**\colon \mathscr{B}an \to \mathscr{B}an$, определяемый как композиция функтора сопряжения (см. пример 9) с самим собой. Для каждого банахова пространства E рассмотрим каноническое вложение $i_E\colon E \to E^{**}$. Нетрудно проверить (проверьте!), что семейство

$$\{i_E\colon E \to E^{**} \,:\, E \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an)\}$$

— морфизм функторов $\mathbf{1}_{\mathscr{B}an} \to **$. Если ограничить наши функторы на полную подкатегорию $\mathscr{R}\mathscr{B}an$, состоящую из рефлексивных пространств, то мы получаем естественную эквивалентность между тождественным функтором и функтором «двойного сопряжения». (Это объясняет, почему естественный изоморфизм между конечномерным линейным пространством и его вторым сопряженным, о котором обычно рассказывают в курсе линейной алгебры, называется «естественным»).

Замечание 5. Интересно, что язык категорий и функторов был придуман специально для того, чтобы ввести понятие естественной эквивалентности, т.е. чтобы математически строго описать многочисленные ситуации, когда «что-то естественно изоморфно чему-то». Все эти понятия (категория, функтор, естественное преобразование, естественная эквивалентность $\ldots$) ввели Эйленберг и Маклейн в 1945 г.

А теперь вернемся к функторам C и Ω.

Упражнение 7. Семейство гомеоморфизмов

$$\{\delta_X\colon X \to \Omega(C(X)) : X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}omp)\}$$

(обозначения см. в начале лекции) — естественная эквивалентность тождественного функтора $\mathbf{1}_{\mathscr{C}omp}$ и функтора $\Omega \circ C\colon \mathscr{C}omp \to \mathscr{C}omp$.

Упражнение 8. Семейство гомоморфизмов

$$\{\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A)) : A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{CBA})\}$$

— естественное преобразование из функтора $\mathbf{1}_{\mathscr{CBA}}$ в функтор $C \circ \Omega\colon \mathscr{CBA} \to \mathscr{CBA}$.

Можно пойти еще дальше:

Упражнение 9*. Для каждой $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{CBA})$ и каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}omp)$ существует биекция $\mathbf{h}_{\mathscr{C}omp}(X, \Omega(A)) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{CBA}}(A, C(X))$. Эта биекция естественна по A и X (придайте строгий смысл последней фразе и докажите).

Замечание 6. Свойство функторов Ω и C, указанное в предыдущем упражнении, означает, что эти функторы *сопряжены* друг другу.

Операторы в гильбертовом пространстве и C^*-алгебры.

Теперь мы уже достаточно знаем о функциональных алгебрах, и можем продолжить наш разговор о функциональном исчислении от ограниченного оператора. Наша следующая цель — построить *непрерывное* функциональное исчисление, т.е. научиться применять к оператору непрерывные функции, определенные на его спектре. На примерах мы убедились, что это возможно не всегда: произвольный ограниченный оператор может не обладать даже гладким исчислением (а уж непрерывным — и подавно). Тем не менее, существует важный класс операторов, к которым можно применять непрерывные (и даже некоторые разрывные) функции. Это — так называемые *нормальные* операторы в гильбертовом пространстве, к изучению которых мы и переходим.

Напоминание 1. Пусть H — гильбертово пространство. Существует каноническое отображение

$$J_H \colon H \to H^*, \ J_H(y) = f_y, \quad \text{где } f_y(x) = \langle x, y \rangle \text{ для всех } x \in H,$$

которое, ввиду теоремы Рисса, биективно, изометрично и антилинейно. Пусть теперь H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ — ограниченный оператор, $T^* \in \mathscr{B}(H_2^*, H_1^*)$ — его сопряженный. *Эрмитово сопряженным* к T называется оператор $T^+ \colon H_2 \to H_1$, определяемый при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} H_1^* & H_2^* \arrow[l, "T^*"'] \\ H_1 \arrow[u, "J_{H_1}"] & H_2 \arrow[l, "T^+"] \arrow[u, "J_{H_2}"'] \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, $T^+ = J_{H_1}^{-1} T^* J_{H_2}$. Оператор T^+ линеен, ограничен, и $\|T^+\| = \|T\|$. Эквивалентным способом T^+ может быть определен как единственное отображение из H_2 в H_1, удовлетворяющее тождеству $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^+ y \rangle$ для всех $x \in H_1$, $y \in H_2$.

В дальнейшем, говоря об операторах между гильбертовыми пространствами, вместо T^+ мы будем (как это обычно и делается) писать T^* и называть этот оператор *сопряженным* к T (опуская слово «эрмитово»), т.к. «обычные» сопряженные операторы нам пока не понадобятся.

Рассматривая операторы, действующие в каком-то одном гильбертовом пространстве H, мы получаем операцию $* \colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $T \mapsto T^*$ на алгебре $\mathscr{B}(H)$. Посмотрим, какими свойствами она обладает.

Предложение 4. *Пусть* $S, T \in \mathscr{B}(H)$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Тогда*

1) $(\lambda S + \mu T)^* = \bar{\lambda} S^* + \bar{\mu} T^*$;
2) $(ST)^* = T^* S^*$;
3) $T^{**} = T$;
4) $\|T^*\| = \|T\|$;
5) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Доказательство. Свойство 4) уже упоминалось выше, а доказательство 1)–3) — простое упражнение. Докажем 5). С одной стороны, $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$ ввиду 4). С другой стороны,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leqslant \|T^*Tx\| \|x\| \leqslant \|T^*T\| \|x\|^2$$

для всех $x \in H$. Отсюда следует противоположное неравенство. □

Эти свойства операции «звездочка» служат мотивировкой для следующего определения.

Определение 7. Пусть A — алгебра. Отображение $*\colon A \to A$, $a \mapsto a^*$ называется *инволюцией*, если оно обладает свойствами 1)–3) из предложения 4. Алгебра, снабженная инволюцией, называется *инволютивной алгеброй*. *Инволютивная банахова алгебра* — это банахова алгебра, снабженная инволюцией, обладающей свойством $\|a^*\| = \|a\|$ для всех $a \in A$. *C^*-алгебра* — это инволютивная банахова алгебра, в которой выполняется тождество $\|a^*a\| = \|a\|^2$ ($a \in A$). Само это тождество называется *C^*-тождеством.*

Сразу же введем отображения, уважающие инволюцию.

Определение 8. Гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ между инволютивными алгебрами называется *инволютивным* (или *$*$-гомоморфизмом*), если $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ для всех $a \in A$.

Ясно, что класс всех инволютивных (инволютивных банаховых, C^*-) алгебр и инволютивных (инволютивных ограниченных) гомоморфизмов образует категорию.

Вот несколько примеров.

Пример 13. Поле $\mathbb{C}$ становится C^*-алгеброй, если в качестве инволюции взять комплексное сопряжение.

Пример 14. Как следует из предложения 4, $\mathscr{B}(H)$ — C^*-алгебра.

Пример 15. Пусть X — хаусдорфов компакт. Определим инволюцию на $C(X)$ по формуле $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ($x \in X$). Легко видеть, что $C(X)$ становится C^*-алгеброй.

Пример 16. Аналогичным образом, если $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, то алгебра $B_{\mathscr{A}}(X)$ $\mathscr{A}$-измеримых ограниченных функций и алгебра $L^\infty(X, \mu)$ являются C^*-алгебрами относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ($x \in X$).

Пример 17. Алгебра $C^n[a,b]$ — инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ($x \in [a,b]$).

Пример 18. Алгебра $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$ — инволютивная банахова алгебра относительно инволюции $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ($z \in \overline{\mathbb{D}}$).

Упражнение 10. Если $n \geqslant 1$, то

1) $C^n[a,b]$ не является C^*-алгеброй;

2) $C^n[a,b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как инволютивная банахова алгебра (т.е. не существует непрерывного биективного $*$-изоморфизма $C^n[a,b]$ ни на какую C^*-алгебру A);

3) $C^n[a,b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как банахова алгебра;

4) $C^n[a,b]$ не изоморфна никакой C^*-алгебре как алгебра;

5) то же самое верно и для $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}})$.

Приведем теперь типичный пример $*$-гомоморфизма между C^*-алгебрами.

Пример 19. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $H = L^2(X,\mu)$. Отображение $\varphi\colon L^\infty(X,\mu) \to \mathscr{B}(H)$, переводящее $f \in L^\infty(X,\mu)$ в оператор умножения $M_f \in \mathscr{B}(H)$, является унитальным изометрическим $*$-гомоморфизмом. В самом деле, соотношение $M_f^* = M_{\bar f}$ легко проверяется (проверьте!), а остальное следует из упр. 13 из лекции 3.

Таким образом, алгебра $L^\infty(X,\mu)$ изометрически вкладывается (с сохранением инволюции) в алгебру $\mathscr{B}(H)$. Оказывается, то же самое верно для любой C^*-алгебры:

Теорема 1 (2-я теорема Гельфанда-Наймарка). *Для любой C^*-алгебры A существует гильбертово пространство H и изометрический $*$-гомоморфизм $A \to \mathscr{B}(H)$.*

Мы не будем доказывать эту теорему, поскольку это увело бы нас в сторону от нашей основной темы и потребовало бы много времени, но все же знать о ней стоит.

Пусть теперь A — инволютивная унитальная алгебра.

Определение 9. Элемент $a \in A$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Множество всех самосопряженных элементов в A обозначается A_{sa}.

Следующее предложение показывает, что самосопряженные элементы играют роль «действительных чисел»:

Предложение 5. *Для любого $a \in A$ существует единственная пара самосопряженных элементов $b, c \in A_{sa}$, таких, что $a = b + ic$. При этом $a = \frac{1}{2}(a + a^*)$, $b = \frac{1}{2i}(a - a^*)$.*

Доказательство. Прямая проверка (убедитесь!). □

Определение 10. Элемент $u \in A$ называется *унитарным*, если $uu^* = u^*u = 1$ (т.е. если u обратим, и $u^* = u^{-1}$).

Определение 11. Элемент $a \in A$ называется *нормальным*, если $aa^* = a^*a$.

Отметим, что любой самосопряженный элемент и любой унитарный элемент нормален.

Определение 12. Элемент $p \in A$ называется *ортопроектором*, если $p^* = p^2 = p$.

Следующее упражнение объясняет геометрический смысл введенных понятий.

Упражнение 11. 1) Оператор $U \in \mathscr{B}(H)$ унитарен $\iff$ он биективен, и $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in H$.

2) Оператор $P \in \mathscr{B}(H)$ — ортопроектор $\iff$ существует замкнутое линейное подпространство $H_0 \subset H$, такое, что $Px = x$ для всех $x \in H_0$ и $Px = 0$ для всех $x \in H_0^\perp$.

Упражнение 12. Операторы сдвига на группах (см. пример 2 из лекции 4) в соответствующих L^2-пространствах унитарны.

Пример 20. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \in L^\infty(X, \mu)$, $M_f \in \mathscr{B}(L^2(X, \mu))$ — оператор умножения на f. Из соотношения $M_f^* = M_{\bar{f}}$ (см. пример 19) легко следует, что

1) M_f нормален;
2) M_f самосопряжен $\iff$ $f(x) \in \mathbb{R}$ для п.в. $x \in X$;
3) M_f унитарен $\iff$ $f(x) \in \mathbb{T}$ для п.в. $x \in X$;
4) M_f — ортопроектор $\iff$ $f(x) \in \{0, 1\}$ для п.в. $x \in X$.

Замечание 7. Вскоре мы увидим, что M_f — это больше чем просто пример нормального оператора; окажется, что любой нормальный оператор в гильбертовом пространстве изометрически эквивалентен некоторому M_f (для подходящих (X, μ) и f).

Упражнение 13. Исследуйте, какие из операторов, упоминавшихся на лекциях 3 и 4, нормальны, а какие — нет.