Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов

Лекция 9.
Спектры элементов C^*-алгебр.
1-я теорема Гельфанда-Наймарка.

Наша ближайшая цель — доказать 1-ую теорему Гельфанда-Наймарка, которая, говоря неформально, утверждает, что *"коммутативные унитальные C^*-алгебры — это то же самое, что компактные топологические пространства"*. Попутно мы установим некоторые полезные спектральные свойства элементов C^*-алгебр, которые пригодятся нам впоследствии.

Предложение 1. *Пусть A — унитальная инволютивная алгебра, $a \in A$ — ее элемент. Тогда*

1) *a обратим $\iff$ a^* обратим; при этом $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.*
2) *$\sigma(a) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$.*

Доказательство. Упражнение. □

Предложение 2. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $u \in A$ — унитарный элемент. Тогда $\|u\| = 1$, и $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$.*

Доказательство. Поскольку $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1$, то и $\|u\| = 1$. Поэтому, если $\lambda \in \sigma(u)$, то $|\lambda| \leqslant 1$ (см. теорему 2 из лекции 2). С другой стороны, $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ (см. упр. 4 из лекции 3). Но u^{-1} тоже унитарен, поэтому и $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$. Значит, $|\lambda| = 1$, как и требовалось. □

Упражнение 1. Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $p \in A$ — ортопроектор. Найдите $\|p\|$ и $\sigma(p)$.

Предложение 3. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда e^{ia} унитарен.*

Для доказательства нам понадобится следующий несложный факт:

Упражнение 2. Пусть A – унитальная банахова алгебра.

1) Если $a, b \in A$ коммутируют, то $e^{a+b} = e^a e^b$.
2) $(e^a)^{-1} = e^{-a}$ для любого $a \in A$.

Доказательство предложения. С учетом предыдущего упражнения,

$$(e^{ia})^* = \sum_n \frac{\left((ia)^*\right)^n}{n!} = \sum_n \frac{(-ia)^n}{n!} = e^{-ia} = (e^{ia})^{-1}.$$

□

Предложение 4. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — самосопряженный элемент. Тогда $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \sigma(a)$, то $e^{i\lambda} \in \sigma(e^{ia})$ по теореме об отображении спектра. Из предыдущих двух предложений следует, что $|e^{i\lambda}| = 1$, а это возможно только при $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Предложение 5. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра. Тогда каждый ее характер $\chi\colon A \to \mathbb{C}$ — $*$-гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть вначале $a \in A_{sa}$. Тогда $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, поэтому и $\sigma(\chi(a)) \subset \mathbb{R}$, т.е. $\chi(a) \in \mathbb{R}$. Если $a \in A$ произволен, то $a = b + ic$, где $b, c \in A_{sa}$ (см. прошлую лекцию). Поэтому $\chi(b), \chi(c) \in \mathbb{R}$, и $\chi(a^*) = \chi(b - ic) = \chi(b) - i\chi(c) = \overline{(\chi(b) + i\chi(c))} = \overline{\chi(a)}$, как и требовалось. □

Предложение 6. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент. Тогда $\|a\| = r(a)$.*

Доказательство. Для любого $b \in A_{sa}$ имеем $\|b\|^2 = \|b^2\|$. Применяя это к элементу $b = a^*a$ и пользуясь нормальностью a, получаем

$$\|a\|^4 = \|a^*a\|^2 = \|(a^*a)^2\| = \|(a^2)^*a^2\| = \|a^2\|^2.$$

Следовательно, $\|a\|^2 = \|a^2\|$. По индукции отсюда легко выводится, что $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$ для любого n. Поэтому $r(a) = \lim_n \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|$. □

Упражнение 3. Какие из предыдущих предложений сохраняют силу для произвольных унитальных инволютивных банаховых алгебр?

Теперь у нас все готово для доказательства первой теоремы Гельфанда-Наймарка. Еще один стандартный факт, которым мы будем пользоваться — это теорема Стоуна-Вейерштрасса. Приведем ее формулировку (без доказательства).

Теорема 1 (Стоун-Вейерштрасс). *Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, $B \subset C(X)$ — подалгебра со следующими свойствами:*

1) *$1 \in B$;*

2) *если $f \in B$, то и $\bar{f} \in B$;*

3) *B разделяет точки X (т.е. для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует $f \in B$ такая, что $f(x) \neq f(y)$).*

Тогда B плотна в $C(X)$.

Теорема 2 (1-ая теорема Гельфанда-Наймарка). *Пусть A — унитальная коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда $\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A))$ — изометрический $*$-изоморфизм.*

Доказательство. Для любого $a \in A$ и любого $x \in \Omega(A) = \mathscr{X}(A)$, с учетом предложения 5, имеем

$$\Gamma_A(a^*)(x) = x(a^*) = \overline{x(a)} = \overline{\Gamma_A(a)(x)} = \Gamma_A(a)^*(x).$$

Это означает, что Γ_A — $*$-гомоморфизм. Если $a \in A_{sa}$, то из предложения 6 и свойств преобразования Гельфанда следует, что $\|\Gamma_A(a)\| = r(a) = \|a\|$. Если же $a \in A$ произволен, то

$$\|\Gamma_A(a)\|^2 = \|\Gamma_A(a)^*\Gamma_A(a)\| = \|\Gamma_A(a^*a)\| = \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Следовательно, Γ_A изометрично и, в частности, имеет замкнутый образ. Наконец, легко видеть, что подалгебра $B = \operatorname{Im}\Gamma_A \subset C(\Omega(A))$ удовлетворяет условиям теоремы Стоуна-Вейерштрасса (проверьте!) и поэтому плотна в $C(\Omega(A))$. Дальше ясно. □

Замечание 1. Итак, никаких других коммутативных унитальных C^*-алгебр, кроме алгебр вида $C(X)$, не бывает. А как же ℓ^∞? На самом деле, никакого противоречия здесь нет: ℓ^∞ изометрически изоморфна $C(X)$, где $X = \Omega(\ell^\infty) = \beta\mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация $\mathbb{N}$ (см. замечание 4 с прошлой лекции).

Таким образом, если мы договоримся отождествлять гомеоморфные компакты и изометрически $*$-изоморфные C^*-алгебры. то, говоря несколько нестрого, соответствие $X \leftrightarrow C(X)$ — это биекция между компактными пространствами и коммутативными унитальными C^*-алгебрами. Но на самом деле, можно сказать больше: это соответствие позволяет отождествить не только объекты, но и морфизмы соответствующих категорий. Такие ситуации встречаются в математике довольно часто, и для их описания существует специальный термин.

Определение 1. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории, $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантный функтор. Говорят, что F *осуществляет эквивалентность* (или *является эквивалентностью*) между $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, если существует функтор $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ такой, что функтор $F \circ G$ изоморфен $\mathbf{1}_{\mathscr{D}}$, а $G \circ F$ изоморфен $\mathbf{1}_{\mathscr{C}}$. При этом G называется *квазиобратным* к F.

Если $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — контравариантный функтор, то говорят, что он *осуществляет антиэквивалентность* $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, если соответствующий ковариантный функтор $F\colon \mathscr{C}^\circ \to \mathscr{D}$ — эквивалентность.

Сформулируем теперь первую теорему Гельфанда-Наймарка в более полной и правильной форме. Обозначим через $C^*\mathscr{A}lg$ категорию унитальных C^*-алгебр и непрерывных унитальных $*$-гомоморфизмов, а через $CC^*\mathscr{A}lg$ — ее полную подкатегорию, состоящую из коммутативных унитальных C^*-алгебр.

Теорема 3 (1-ая теорема Гельфанда-Наймарка). *Функтор $C\colon \mathscr{C}omp \to CC^*\mathscr{A}lg$ является антиэквивалентностью категорий. Квазиобратным к нему служит функтор $\Omega\colon CC^*\mathscr{A}lg \to \mathscr{C}omp$. При этом $\delta\colon \mathbf{1}_{\mathscr{C}omp} \to \Omega \circ C$ и $\Gamma\colon \mathbf{1}_{CC^*\mathscr{A}lg} \to C \circ \Omega$ — функторные изоморфизмы.*

Доказательство. Следует из теоремы 2 и упражнений 7 и 8 с прошлой лекции. $\square$

На первый взгляд может показаться, что в этой формулировке мы потеряли часть информации: ведь $\Gamma_A\colon A \to C(\Omega(A))$ — это не просто непрерывный биективный $*$-изоморфизм, а еще и изометрия. На самом деле, как мы сейчас увидим, изоморфизм в $C^*\mathscr{A}lg$ (а, значит, и в $CC^*\mathscr{A}lg$) *автоматически* является изометрией.

Предложение 7. *Пусть A — инволютивная унитальная банахова алгебра, B — унитальная C^*-алгебра, $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм. Тогда φ непрерывен, и $\|\varphi\| = 1$.*

Доказательство. Пусть вначале $a \in A_{sa}$; тогда $\varphi(a) \in B_{sa}$, поэтому $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leqslant r(a) \leqslant \|a\|$ (см. предложение 6). Если же $a \in A$ произволен, то, применяя только что доказанное неравенство к элементу a^*a, мы получаем

$$\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| \leqslant \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2.$$

Следовательно, $\|\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$ для любого a, т.е. $\|\varphi\| \leqslant 1$. Противоположное неравенство следует из того, что $\varphi(1) = 1$. $\square$

Следствие 1. *Любой унитальный $*$-изоморфизм между унитальными C^*-алгебрами изометричен.*

Замечание 2. Неформальный смысл первой теоремы Гельфанда-Наймарка в том, что изучать компакты — это то же самое, что изучать унитальные коммутативные C^*-алгебры. Поэтому на произвольную (т.е. некоммутативную) унитальную C^*-алгебру можно смотреть как на «алгебру непрерывных функций на некоммутативном компактном пространстве» (или, выражаясь еще более вольно, как на «некоммутативное компактное пространство»). Идею рассматривать теорию C^*-алгебр как «некоммутативную топологию» первым систематически начал развивать А. Конн. Интересно, что такая точка зрения принесла (и продолжает приносить) большую пользу обеим наукам — как топологии, так и теории операторных алгебр. Почитать об этом можно в книге Конна "Noncommutative Geometry"; более доступные источники — книга Дж. Ланди "An introdunction to noncommutative spaces and their geometry" (она есть на `http://arxiv.org`) или лекции Н. Хигсона и Дж. Роу (`http://www.math.psu.edu/gfa/ClaySymposium/Overview.html`).

Вот еще одно полезное спектральное свойство C^*-алгебр, которое вскоре нам понадобится.

Теорема 4. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $B \subset A$ — замкнутая $*$-подалгебра, содержащая единицу A. Тогда $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$ для любого $b \in B$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что B — наполненная, т.е. что каждый элемент $b \in B$, обратимый в A, обратим и в B. Итак, пусть $b \in B \cap \mathrm{Inv}(A)$; тогда $b^*b \in B_{sa} \cap \mathrm{Inv}(A)$, поэтому $\sigma_B(b^*b) \subset \mathbb{R}$ (предложение 4). Значит, для любого $t \in \mathbb{R}$ элемент $b^*b + it1$ обратим в B. Рассмотрим теперь $(b^*b + it1)^{-1} \in B$ и $(b^*b)^{-1} \in A$ как элементы A. Устремляя t к нулю и пользуясь замкнутостью B, мы видим, что $(b^*b)^{-1} \in B$. Поэтому элемент $(b^*b)^{-1}b^* \in B$ — левый обратный для b. Проделав то же самое с элементом bb^*, мы получаем, что b обратим справа в B. Следовательно, $b \in \mathrm{Inv}(B)$, как и требовалось. □

Непрерывное функциональное исчисление.

А теперь, как и было обещано, мы докажем, что нормальные операторы в гильбертовом пространстве (а на самом деле — нормальные элементы любых C^*-алгебр) обладают непрерывным исчислением.

Пусть A — унитальная инволютивная банахова алгебра, $a \in A$ — ее нормальный элемент, $K \subset \mathbb{C}$ — компакт. Как и раньше, через $t \in C(K)$ обозначим функцию $t(z) = z$.

Определение 2. *Непрерывным исчислением от a на K* называется непрерывный унитальный $*$-гомоморфизм $\gamma_c \colon C(K) \to A$, такой, что $\gamma_c(t) = a$.

Предложение 8. *Если непрерывное исчисление от a на K существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $P \subset C(K)$ — унитальная подалгебра, порожденная функциями t и $\bar{t}$ (т.е. множество всех полиномов от t и $\bar{t}$). Из теоремы Стоуна-Вейерштрасса следует, что P плотна в $C(K)$; с другой стороны, γ_c однозначно определено на P. □

Упражнение 4. Если непрерывное исчисление от a на K существует, то $\sigma(a) \subset K$.

Если не налагать на A никаких условий, то непрерывного исчисления может и не существовать:

Упражнение 5. Приведите пример унитальной инволютивной банаховой алгебры A и нормального элемента $a \in A$, не обладающего непрерывным исчислением ни на каком компакте.

Теорема 5. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент. Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$, содержащего $\sigma(a)$, существует единственное непрерывное исчисление $\gamma_c \colon C(K) \to A$ от a на K. Если $K = \sigma(a)$, то γ_c изометрично.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $K = \sigma(a)$ (почему?). Пусть $B \subset A$ — унитальная C^*-подалгебра, порожденная a (т.е. $B = \overline{\operatorname{span}}\{a^m(a^*)^n : m, n \in \mathbb{Z}_+\}$). Очевидно, B коммутативна. Пусть $\Omega = \Omega(B)$ — ее максимальный спектр. В силу первой теоремы Гельфанда-Наймарка, преобразование Гельфанда $\Gamma_B \colon B \to C(\Omega)$ — изометрический $*$-изоморфизм. Рассмотрим отображение $\varphi \colon \Omega \to \sigma_B(a)$, $\varphi(x) = \hat{a}(x)$ для всех $x \in \Omega$. Из свойств преобразования Гельфанда следует, что φ — сюръекция; кроме того, $\sigma_B(a) = \sigma(a)$ ввиду теоремы 4. Из сюръективности φ вытекает, что индуцированный гомоморфизм $\varphi^\bullet \colon C(\sigma(a)) \to C(\Omega)$, $f \mapsto f \circ \varphi$ изометричен. Определим теперь $\gamma_c \colon C(\sigma(a)) \to A$ как единственное отображение, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] & A \\ C(\Omega) \arrow[u, "\Gamma_B^{-1}"] & C(\sigma(a)) \arrow[l, "\varphi^\bullet"'] \arrow[u, "\gamma_c"'] \end{tikzcd}$$

(здесь верхняя стрелка — вложение B в A). Из сказанного выше следует, что γ_c — изометрический $*$-гомоморфизм. Далее, для любого $x \in \Omega$ $\varphi^\bullet(t)(x) = t(\varphi(x)) = \hat{a}(x)$, поэтому $\gamma_c(t) = \Gamma_B^{-1}\varphi^\bullet(t) = a$. Следовательно, γ_c — непрерывное исчисление от a на $K = \sigma(a)$. □

Упражнение 6. На самом деле, отображение $\varphi \colon \Omega \to \sigma(a)$, участвующее в доказательстве теоремы, не просто сюръективно, а является гомеоморфизмом. Поэтому $\varphi^\bullet \colon C(\sigma(a)) \to C(\Omega)$ — изометрический $*$-изоморфизм.

Итак, непрерывное исчисление построено. Посмотрим теперь на его свойства. Всюду далее A — унитальная C^*-алгебра, $a \in A$ — нормальный элемент.

Во-первых, непрерывное исчисление, как и следовало ожидать, согласовано с голоморфным:

Упражнение 7. Пусть γ_h и γ_c — голоморфное и непрерывное исчисления от a на $\sigma(a)$. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(\sigma(a)) \arrow[dr, "\gamma_h"] \arrow[dd] & \\ & A \\ C(\sigma(a)) \arrow[ur, "\gamma_c"'] & \end{tikzcd}$$

(здесь вертикальная стрелка — канонический «гомоморфизм ограничения», определяемый очевидным образом).

Упражнение 8. Сформулируйте и докажите согласованность непрерывных исчислений на разных компактах (ср. упр. 2 из лекции 6).

Благодаря результатам двух последних упражнений, мы можем, когда удобно, вместо $\gamma_c(f)$ писать просто $f(a)$ для любой непрерывной функции f на любом компакте, содержащем $\sigma(a)$ (как мы и делали раньше для полиномиального, рационального и голоморфного исчислений).

Упражнение 9 (теорема об отображении спектра). Для любой $f \in C(\sigma(a))$ справедливо равенство $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Упражнение 10 (теорема о композиции). Если $f \in C(\sigma(a))$ и $g \in C(\sigma(f(a)))$, то $g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

Упражнение 11 (перестановочность с гомоморфизмами). Пусть $\varphi\colon A \to B$ — унитальный $*$-гомоморфизм C^*-алгебр. Тогда $\varphi(f(a)) = f(\varphi(a))$ для любой $f \in C(\sigma(a))$.

Следствие 2 (согласованность с преобразованием Гельфанда). *Если A коммутативна, то $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$ для любой $f \in C(\sigma(a))$.*

Доказательство. Достаточно применить результат предыдущего упражнения, взяв в качестве φ любой характер A. □

Как и для голоморфного исчисления, естественно спросить, верна ли теорема об отображении спектра для его частей. Впрочем, у спектра нормального элемента этих частей не так уж много:

Упражнение 12. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор. Тогда

$$\sigma_r(T) = \varnothing, \quad \sigma_{ap}(T) = \sigma_{su}(T) = \sigma(T), \quad \sigma_p(T) = \sigma_{com}(T).$$

Указание. Вначале докажите следующее:
1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*T$ для любого $T \in \mathscr{B}(H)$.
2) Если T нормален, то $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

Упражнение 13. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — нормальный оператор, $f \in C(\sigma(T))$. Верно ли, что $\sigma_p(f(T)) = f(\sigma_p(T))$? Тот же вопрос для σ_c.

Теперь разберитесь с «модельным примером» нормального оператора (ср. замечание 7 в конце прошлой лекции).

Упражнение 14. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f \in L^\infty(X, \mu)$. Опишите непрерывное исчисление от оператора умножения M_f, действующего в $L^2(X, \mu)$.

Интересно, что многое из того, что было только что доказано (или предложено в качестве упражнения), переносится на случай «нескольких переменных»:

Упражнение 15. *("Научно-исследовательское").* Пусть A — унитальная C^*-алгебра, $a_1, \dots, a_n \in A$ — попарно коммутирующие нормальные элементы. Придумайте определение совместного спектра $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ так, чтобы он был непустым компактом в $\mathbb{C}^n$ и для $n = 1$ превращался в обычный спектр элемента. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывном функциональном исчислении от $a_1, \dots, a_n$ и теорему об отображении спектра.