Независимый московский университет
Экзамен
по курсу «топология»
2 курс, IV семестр, 11 мая 2003 года.

1. Вычислите гомологии подпространства в $\mathbb{C}^2$, заданного неравенством $x^2 + y^2 \neq 0$.

2. Пространство X получается из $S^2 \times [0,1]$ склейкой граничных сфер $S^2 \times \{0\}$ и $S^2 \times \{1\}$ по антиподальной инволюции $x \to -x$.

   а) постройте клеточное разбиение;

   б) вычислите (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$;

   в) вычислите (ко)гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$;

   г) определите умножение в $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$.

3. Докажите, что функция $\cos 2\varphi + \cos\psi$ на бутылке Клейна является функцией Морса. Опишите клеточное разбиение, полученное при помощи этой функции (угловые координаты на бутылке Клейна введите самостоятельно).

4. Какой род поверхности в торе $\mathbb{T}^3$, заданной уравнением

$$\sin\varphi_1 + 2\sin\varphi_2 + 3\cos(\varphi_1 + \varphi_3) = 3?$$

5. Рассмотрим стандартное вложение кренделя в $\mathbb{R}^3$. Пусть D — ограниченная им область. Существует ли в D гладкое векторное поле единичной длины, направленное в точках границы наружу?

6. Существует ли непрерывное отображение $S^1 \times S^3 \to \mathbb{C}P^2$ ненулевой степени?