2. Точная последовательность пары (21 февраля)

1. Для сингулярных гомологий докажите, что $H_k(X,Y) \cong H_k(X \cup CY, CY)$, где CY — конус над Y.

2. Для сингулярных гомологий докажите, что $H_k(X,Y) \cong H_k(X \cup CY)$ при $k \geqslant 2$.

3. Вычислите сингулярные гомологии пары (D^n, S^{n-1}) и сингулярные гомологии S^n, рассмотрев точную последовательность пары (D^n, S^{n-1}).

4. Выразите гомологии букета $X \bigvee Y$ через гомологии X и Y.

5. Вычислите гомологии пары $(S^p \times S^q, S^p \bigvee S^q)$.

6. Вычислите гомологии $S^p \times S^q$.

Точная последовательность Майера–Вьеториса для симплициальных гомологий

7. Пусть K — симплициальный комплекс, K_0 и K_1 — такие его подкомплексы, что $K = K_0 \bigcup K_1$. Положим $L = K_0 \bigcap K_1$.

а) Докажите, что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_*(L) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} C_*(K_0) \oplus C_*(K_1) \xrightarrow{(i_0, i_1)} C_*(K) \to 0,$$

где $j_a : L \to K_a$ и $i_a : K_a \to K$ — естественные вложения.

б) Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\cdots \to H_k(L) \to H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \to H_k(K) \to H_{k-1}(L) \to \ldots$$

(*последовательность Майера–Вьеториса*).

8. С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии тора T^2.

9. Пусть K — симплициальный комплекс, ΣK — надстройка над K. Докажите, что для любого $k \geqslant 1$ имеется изоморфизм $H_k(\Sigma K) \cong \tilde{H}_{k-1}(K)$.

10. а) С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии дополнения узла в S^3 (ответ не зависит от выбора узла).

б) Вычислите гомологии дополнения зацепления в S^3, состоящего из n связных компонент (ответ зависит только от n).

11. Покажите, что для сингулярных гомологий (и произвольных пространств) теорема о точной последовательности Майера–Вьеториса, вообще говоря, неверна.