3. Клеточные гомологии (28 февраля)

1. Вычислите гомологии $\mathbb{C}P^n$ (в том числе и $\mathbb{C}P^\infty$).

2. Вычислите гомологии $\mathbb{R}P^n$ (в том числе и $\mathbb{R}P^\infty$).

3. Вычислите гомологии n-мерного тора T^n.

4. Вычислите гомологии с коэффициентами $\mathbb{Z}$ а) замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей; б) замкнутых неориентируемых двумерных поверхностей.

5. Пусть X — CW-комплекс, $H_1(X)$ — группа гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$. Докажите, что $H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

6. Пусть X — n-связный CW-комплекс ($n \geqslant 1$), $H_k(X)$ — группа гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}$. Докажите, что $H_1(X) = H_2(X) = \cdots = H_n(X) = 0$ и $H_{n+1}(X) = \pi_{n+1}(X)$.

7. Приведите пример нестягиваемого 2-мерного CW-комплекса, который имеет такие же гомологии, как у точки. (Указание: в качестве одномерного остова возьмите $S^1 \vee S^1$ и приклейте к нему две двумерные клетки по словам a^5b^{-3} и $b^3(ab)^{-2}$.)

Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа, причём $p \geqslant 3$. Зададим на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ действие образующей группы $\mathbb{Z}_p$ следующим образом:

$$(z, w) \mapsto \big(\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi iq/p)w\big).$$

Фактор сферы S^3 по такому действию группы $\mathbb{Z}_p$ называют *линзовым пространством* и обозначают $L(p, q)$.

8. Вычислите гомологии $L(p, q)$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$.

9. Будем рассматривать S^∞ как подмножество $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из точек $(z_1, z_2, \ldots)$, для которых $\sum |z_i|^2 = 1$. Введём на S^∞ следующее отношение эквивалентности: $(z_1, z_2, \ldots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \ldots)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Пространство $L^\infty_m = S^\infty/\sim$ называют *бесконечномерным линзовым пространством*. Вычислите гомологии пространства L^∞_m с коэффициентами $\mathbb{Z}$.

10. Вычислите гомологии комплексного многообразия Грассмана $G^{\mathbb{C}}_{n,\infty}$ (состоящего из комплексных n-мерных подпространств в $\mathbb{C}^\infty$) с коэффициентами $\mathbb{Z}$.

11. Вычислите гомологии вещественного многообразия Грассмана $G^{\mathbb{R}}_{n,\infty}$ (состоящего из вещественных n-мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty$) с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

Пусть G — абелева группа, n — натуральное число. *Пространство Мура* $M(G, n)$ — это CW-комплекс X, для которого

$$\tilde{H}_k(X) = \begin{cases} G & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases}$$

При $n > 1$ дополнительно предполагается, что $\pi_1(X) = 0$.

12. Докажите, что для любого натурального n и для любой абелевой группы G существует пространство Мура $M(G, n)$.

13. Вычислите гомологии вещественного многообразия Грассмана $G_{2,4}$ с коэффициентами а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}$.