## 5. Фундаментальный класс. Двойственность Пуанкаре (14 марта)

**1.** Пусть $i_* : H_n(\partial W^{n+1}) \to H_n(W^{n+1})$ — гомоморфизм, индуцированный естественным включением. Тогда если многообразие $W^{n+1}$ ориентируемо, а его край $\partial W^{n+1}$ связен, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$, а если оно неориентируемо, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.

**2.** Докажите, что если $f : \partial W^{n+1} \to M^n$ — ограничение некоторого непрерывного отображения $F : W^{n+1} \to M^n$, причём многообразие $W^{n+1}$ ориентируемо, а его край $\partial W^{n+1}$ связен, то $\deg f = 0$.

**3.** Пусть $M^n$ — замкнутое ориентируемое многообразие, $H_k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_k$ и $H^k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k$, где $T_k$ и $T^k$ — кручения. Докажите, что $a_k = a_{n-k}$, $b_k = b_{n-k}$, $T_k \cong T_{n-k-1}$, $T^k \cong T^{n-k+1}$ и $T^1 = 0$.

**4.** а) Докажите, что если $M^n$ — замкнутое многообразие, а $R$ — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей, то

$$H^n(M^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{для ориентируемого } M^n; \\ R/2R & \text{для неориентируемого } M^n. \end{cases}$$

б) Докажите, что если $M^n$ — замкнутое ориентируемое многообразие, то группа $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ не имеет кручения, а если $M^n$ — замкнутое неориентируемое многообразие, то подгруппа кручения в $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

**5.** Докажите, что $H_k(M^n \setminus \operatorname{int} D^n) \cong H_k(M^n)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-2$. (Здесь $D^n$ — шар, расположенный в некоторой карте.)

**6.** Докажите, что если $M^n$ — замкнутое ориентируемое многообразие, то утверждение задачи 5 остаётся верным и при $k = n-1$. Существенна ли здесь замкнутость многообразия $M^n$? А его ориентируемость?

**7.** Пусть $M^n$ — замкнутое ориентируемое многообразие, причём его надстройка $\Sigma M^n$ гомеоморфна замкнутому ориентируемому многообразию. Доказать, что $M^n$ — *гомологическая сфера*, т.е. $H_k(M^n) \cong H_k(S^n)$ для всех $k$.

Будем называть гомологический класс $\alpha$ над $\mathbb{Z}$ *примитивным*, если $\alpha \neq m\beta$, где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и $\beta$ — некоторый гомологический класс над $\mathbb{Z}$. Отметим, что если $m\alpha = 0$, то $\alpha = (m+1)\alpha$, поэтому элемент конечного порядка не может быть примитивным.

**8.** Предположим, что замкнутая несамопересекающаяся кривая $f$ реализует гомологический класс $\alpha \in H_1(M^2)$, где $M^2$ — замкнутое ориентируемое многообразие. Докажите, что тогда либо $\alpha = 0$, либо $\alpha$ — примитивный гомологический класс.

**9.** Докажите, что любой примитивный гомологический класс замкнутого ориентируемого многообразия $M^2$ реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.