7. Умножение в когомологиях (28 марта)

1. Докажите, что если $m > n$, то любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ индуцирует нулевое отображение $f^* : H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \to H^k(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2)$ для всех $k \geqslant 1$.

2. Докажите, что если $m > n$, то любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ индуцирует нулевое отображение $f_* : H_k(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \to H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ для всех $k \geqslant 1$.

3. Докажите, что если $m > n$, то любое непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^n$ индуцирует нулевое отображение $f_* : \pi_1(\mathbb{R}P^m) \to \pi_1(\mathbb{R}P^n)$.

4. Докажите, что клеточные цепные комплексы для тора T^2 и для пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ изоморфны, но кольца когомологий этих пространств не изоморфны.

5. Докажите, что кольца когомологий пространств $\mathbb{R}P^3$ и $\mathbb{R}P^2 \vee S^3$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$ изоморфны, а с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ не изоморфны.

6. Докажите, что степень отображения $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ равна λ^n, где $\lambda \in \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что при чётном n не существует диффеоморфизма $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, обращающего ориентацию.

8. Докажите, что при нечётном n существует диффеоморфизм $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$, обращающий ориентацию.

9. Докажите, что если M^{4k+2} — замкнутое ориентируемое многообразие, то $\dim H_{2k+1}(M^{4k+2}; \mathbb{R})$ — чётное число.

Пусть σM^{4n} — сигнатура (индекс) формы пересечения замкнутого ориентируемого многообразия M^{4n}.

10. Пусть M_1^{4n} и M_2^{4n} — замкнутые ориентируемые многообразия. Докажите, что $\sigma(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) = \sigma(M_1^{4n}) + \sigma(M_2^{4n})$.

11. Пусть M^{4k} — замкнутое ориентируемое многообразие, которое является краем компактного ориентируемого многообразия W^{4k+1}. Докажите, что тогда $\sigma(M^{4k}) = 0$.