8. Теорема Кюннета. Теорема Лефшеца (4 апреля)

1. Пусть K и L — конечные симплициальные комплексы. Докажите, что $\chi(K \times L) = \chi(K)\chi(L)$.

2. Пусть $n > m > 1$. Докажите, что все гомотопические группы пространств $S^n \times \mathbb{R}P^m$ и $S^m \times \mathbb{R}P^n$ изоморфны, а группы гомологий у них разные.

3. а) Пусть отображение $f : S^n \to S^n$ таково, что $\deg f \neq (-1)^{n+1}$. Докажите, что отображение f имеет неподвижную точку.

б) Докажите, что на сфере S^{2n} не существует непрерывного векторного поля без особых точек.

4. Докажите, что любое отображение $f : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ имеет неподвижную точку.

5. Пусть $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ — непрерывное отображение. Докажите, что число Лефшеца отображения f равно $1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$, где $\lambda \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите, что если n чётно, то любое непрерывное отображение $f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$ имеет неподвижную точку.

7. а) Пусть $K = \bigcup_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — стягиваемые подкомплексы. Докажите, что для любых n элементов $\alpha_i \in H^{p_i}(K)$, $p_i > 0$, произведение $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_n$ равно нулю.

б) Докажите, что когомологическое умножение в ΣK тривиально, т.е. cup-произведение любых двух когомологических классов положительной размерности равно нулю.

8. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ нельзя представить в виде объединения n стягиваемых подкомплексов.

б) Представьте $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ в виде объединения $n + 1$ стягиваемых подкомплексов.

9. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, $f : K \to K$ — непрерывное отображение, p — простое число, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p}$. Докажите, что $\Lambda(f^p) \equiv \Lambda(f) \pmod{p}$. (Здесь $\Lambda(f)$ — число Лефшеца.)