9. Теорема Гуревича. Теория препятствий. (11 апреля)

1. Докажите, что замкнутое односвязное трёхмерное многообразие M^3 гомотопически эквивалентно S^3.

2. Пусть M^n $(n \geqslant 3)$ — замкнутое многообразие размерности n, причём $\pi_k(M^n) = 0$ при $k \leqslant n/2$. Докажите, что M^n гомотопически эквивалентно сфере S^n.

3. а) Докажите, что надстройка над ацикличным CW-комплексом стягиваема.

б) Приведите пример нестягиваемого пространства, надстройка над которым стягиваема.

4. Докажите, что для любого n-мерного CW-комплекса K (с отмеченной вершиной) и любого $(n-1)$-связного пространства X (с отмеченной точкой x_0) имеет место взаимно однозначное соответствие $[K, X] \longleftrightarrow H^n(K; \pi_n(X))$.

5. Докажите, что если K — n-мерный CW-комплекс, то любой элемент группы $H^n(K; \mathbb{Z})$ можно представить в виде $f^*\alpha$, где α — образующая группы $H^n(S^n; \mathbb{Z})$ и $f : K \to S^n$ — некоторое отображение.

6. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^\infty$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.

б) Докажите, что $\mathbb{C}P^\infty$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}, 2)$.

7. а) Пусть X_n — множество всех точек $\mathbb{C}^n$ с попарно различными координатами. Докажите, что X_n — пространство типа $K(P_n, 1)$. (Возникающую здесь группу P_n называют *группой крашеных кос* из n нитей.)

б) Пусть Y_n — фактор X_n по действию группы S_n (перестановки координат). Тогда Y_n — пространство типа $K(B_n, 1)$. (Возникающую здесь группу B_n называют *группой кос* из n нитей.

8. Будем рассматривать S^∞ как подмножество $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из точек $(z_1, z_2, \ldots)$, для которых $\sum |z_i|^2 = 1$. Введём на S^∞ следующее отношение эквивалентности: $(z_1, z_2, \ldots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \ldots)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Докажите, что $L^\infty_m = S^\infty/\sim$ — пространство типа $K(\mathbb{Z}_m, 1)$.

9. Докажите, что

$$H_n(L^\infty_m) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \text{для нечётных } n; \\ 0 & \text{для чётных } n > 0. \end{cases}$$

10. Пусть M^3 — трёхмерное многообразие с бесконечной фундаментальной группой, причём $\pi_2(M^3) = 0$. Докажите, что M^3 — пространство типа $K(\pi, 1)$.

11. Пусть X — конечномерный CW-комплекс типа $K(\pi, 1)$. Докажите, что группа π не содержит элементов конечного порядка.