ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

Петлей в топологическом пространстве X с началом в точке $p \in X$ называется непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. *Произведением* петель γ_1 и γ_2 называется петля $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$ такая, что $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$.

Петли γ_0 и γ_1 с началом в точке p называются *гомотопными* (обозначение $\gamma_0 \sim \gamma_1$), если существует семейство петель γ_τ, $0 \le \tau \le 1$ с началом в точке p такое, что точка $\gamma_\tau(t) \in X$ зависит непрерывно как от t, так и от τ.

Задача 1. Докажите, что гомотопность петель — отношение эквивалентности.

Множество классов эквивалентности (классов гомотопных петель) обозначается $\pi_1(X,p)$.

Задача 2. Докажите, что если X — выпуклое подмножество (например, шар) в $\mathbb{R}^n$, то $\pi_1(X,p)$ состоит из одного элемента.

Задача 3. Докажите, что если $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ и $\gamma_2 \sim \gamma_2'$, то $\gamma_1 \circ \gamma_2 \sim \gamma_1' \circ \gamma_2'$.

Из задачи 3 следует (почему ?), что умножение петель порождает умножение на множестве $\pi_1(X,p)$.

Задача 4. Докажите, что относительно этого умножения $\pi_1(X,p)$ — группа (т.е. умножение ассоциативно, обладает единицей и для каждого элемента существует обратный).

Задача 5. Докажите, что если точки $p \in X$ и $q \in X$ можно соединить непрерывной кривой, то группы $\pi_1(X,p)$ и $\pi_1(X,q)$ изоморфны.

Таким образом, если X линейно связно, то можно не указывать точку p и писать просто $\pi_1(X)$ — *фундаментальная группа* пространства X.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, и $f(p) = q$. Отображение $f_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$ сопоставляет классу гомотопии петли γ класс гомотопии петли $f \circ \gamma$.

Задача 6. Докажите, что отображение f_* корректно определено (т.е. класс гомотопии петли $f \circ \gamma$ не меняется при замене петли γ на гомотопную) и является гомоморфизмом групп. Докажите, что $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Задача 7. Докажите, что если отображения f_0 и f_1 гомотопны в классе отображений, переводящих точку p в точку q (т.е. существует семейство отображений $f_t : X \to Y$ такое, что $f_t(p) = q$, и точка $f_t(x)$ непрерывно зависит как от x, так и от t), то $(f_0)_* = (f_1)_*$.

Задача 8. Обобщение задачи 7: пу сть отображения f_0 и f_1 гомотопны, но в процессе гомотопии точка $f_t(p)$ описывает петлю γ в пространстве Y. Докажите равенство $(f_1)_*(\tau) = [\gamma]^{-1}(f_0)_*(\tau)[\gamma]$, где $\tau \in \pi_1(Y,q)$ — произвольный элемент фундаментальной группы, а $[\gamma] \in \pi_1(Y, q)$ обозначает класс гомотопии петли γ.

Задача 9. Выведите из задач 6 и 8, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Задача 10. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Докажите, используя задачу 8, что множество классов гомотопии непрерывных отображений $S^1 \to X$ есть множество классов сопряженных элементов в группе $\pi_1(X)$.

Указание. Отображения $S^1 \to X$, в отличие от петель, не учитывают начальной точки.

Вычислим $\pi_1(S^1)$. Для вычисления будем считать, что S^1 реализована как $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Задача 11. Докажите, что для каждой петли γ с началом в точке $(1, 0) \in S^1$ существует и единственна *угловая функция* $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. φ непрерывна.
2. $\varphi(0) = 0$.
3. Для всякого $t \in [0, 1]$ $\varphi(t)$ равна углу, который образует радиус-вектор точки $\gamma(t)$ с осью абсцисс, плюс слагаемое вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ (вообще говоря, k зависит от t).

Указание. Доказательство “индукцией по $t \in [0, 1]$”: пусть T — множество $t \in [0, 1]$ таких, что угловую функцию можно однозначно определить на отрезке $[0, t]$. Докажите, что $T \subset [0, 1]$ открыто, замкнуто и непусто.

Целое число $\varphi(1)/2\pi$ назовем *индексом* петли γ.

Задача 12. Докажите, что петли γ_1 и γ_2 гомотопны тогда и только тогда, когда их индексы равны.

Указание (к утверждению “тогда”)**.** Рассмотрите *графики* угловых функций.

Задача 13. Изучите, как ведет себя индекс при умножении петель. Докажите, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Задача 14. Докажите, что фундаментальная группа тора (граница бублика, он же $S^1 \times S^1$) изоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. И, более общо:

Пусть A и B — линейно связные топологические пространства. Докажите, что $\pi_1(A \times B) = \pi_1(A) \times \pi_1(B)$.

Задача 15. Вычислите фундаментальную группу полнотория (бублика). Вычислите фундаментальную группу трехмерного пространства, из которого удалена единичная окружность, лежащая в плоскости xy.