МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ НМУ ТОПОЛОГИЯ, 2 СЕМЕСТР

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И НАКРЫТИЯ

Пусть X — букет двух окружностей A и B, Y_1, Y_2, Y_3 — введенные на лекции накрытия над ним.

Задача 1. а) Дайте формальное определение топологического пространства Y_1 ("бесконечного дерева"). б) Обобщение. Закончите следующее определение: пусть дано множество V и множество пар $E \subset V \times V$. *Графом* с множеством вершин V и с множеством ребер E называется следующее топологическое пространство ...

Задача 2. Докажите, что пространство Y_1 стягиваемо.

Задача 3. Выведите из задачи 2 равенство $\pi_1(X) = F_2$.

Фундаментальная группа букета n окружностей изоморфна F_n; доказательство аналогично.

Задача 4. Постройте накрытия $Y_1 \to Y_2$ и $Y_1 \to Y_3$ и вычислите $\pi_1(Y_2)$ и $\pi_1(Y_3)$.

Задача 5. Фудаментальные группы пространств Y_2 и Y_3 благодаря накрытиям над X можно рассматривать, как подгруппы F_2. Что это за подгруппы?

Задача 6. Докажите, что любой связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа?

Задача 7. Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа.

Задача 8. Докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы F_k с k образующими, и индекс $|F_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе F_p. Выразите число p через n и k.