Фундаментальные группы классических пространств

Задача 1. (Напоминание.) Докажите, что фундаментальная группа тора (граница бублика, оно же $S^1 \times S^1$) изоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. И, более общо:

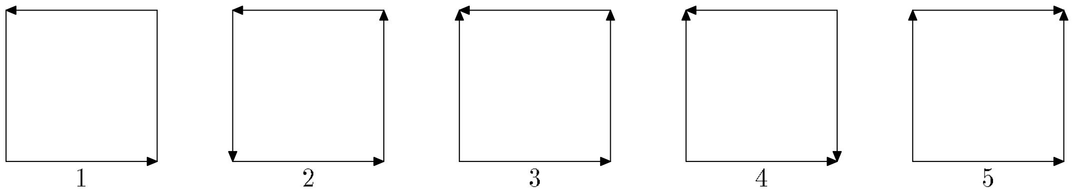
Задача 2. (Напоминание.) Пусть A и B — линейно связные топологические пространства. Докажите, что $\pi_1(A \times B) = \pi_1(A) \times \pi_1(B)$.

Задача 3. Вычислите фундаментальную группу n-мерной сферы (S^n).

Указание. Докажите, что для любого пути на сфере существует гомотопный ему путь, не проходящий через какую-нибудь точку.

Лентой Мебиуса M называется квадрат, правая и левая сторона которого отождествлены, как на рисунке 1.

Проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$ и Бутылкой Клейна K называ ются квадраты, стороны которых попарно отождествлены, как на рис. 2 и 3 соответственно.



Задача 4. Что изображено на рисунках 4 и 5?

Задача 5. Постройте двулистное накрытие $s : C \to M$ ленты Мебиуса цилиндром $C = S^1 \times [0, 1]$. Докажите, что $\pi_1(M) = \pi_1(C) = \mathbb{Z}$, и опишите отображение фундаментальных групп $s_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$.

Задача 6. Постройте двулистное накрытие $c : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ и вычислите группу $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Докажите, что окрестность границы квадрата на рисунке гомеоморфна ленте Мебиуса. Что представляет собой прообраз c^{-1}(окрестности) $\subset S^2$?

Задача 7. Постройте двулистное накрытие $c : \mathbb{T}^2 \to K$ и опишите подгруппу (индекса 2) $c_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$. Докажите, что $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$.

n-мерное проективное пространство ($\mathbb{R}P^n$) определяется одним из трех способов:

$(n + 1)$-ки чисел, не все из которых равны 0, с точностью до пропорциональности.

n-мерная сфера со склеенными противоположными точками.

n-мерный диск со склеенными противоположными точками границы.

Задача 8. Докажите гомеоморфность вышеописанных пространств и вычислите фундаментальную группу $\mathbb{R}P^n$.

Сечением накрытия $\phi : Y \to X$ называется отображение $\psi : X \to Y$, такое что $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}$.

Задача 9. Докажите, что накрытие со связной базой, имеющее сечение, тривиально.

Задача 10. Докажите, что не существует однозначного корня из комплексного числа.

Задача 11. Докажите, что непрерывное отображение круга в себя имеет неподвижную точку.