ФОРМУЛА РИМАНА–ГУРВИЦА

Задача 1. Пусть $A(z) = z^n$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Докажите, что отображение $A : \Omega \to \Omega$ определяет связное n-листное накрытие.

Задача 2. Пусть $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — многочлен степени n, $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$, и $\Psi_\varepsilon = A^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Докажите, что при достаточно малом ε отображение $A : \Psi_\varepsilon \to \Omega_\varepsilon$ определяет n-листное накрытие. Опишите ограничение этого накрытия на компоненты связности множества Ψ_ε.

Обозначим $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ многочлен степени n, и предположим в дальнейшем, что он не имеет кратных корней. Пусть $M_A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = A(z), z \in \Omega_R\}$, где $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, а $h : M_A \to \mathbb{C}$ — отображение, заданное формулой $h(z, w) = z$.

Задача 3. Докажите, что ограничение отображения h на прообраз окружности $\omega_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ при достаточно большом R является двулистным накрытием, тривиальным при четном n и нетривиальным (связным) при нечетном n.

Задача 4. Докажите, что множество M_A при достаточно большом R гомеоморфно линейно связной ориентируемой поверхности, край которой описан в задаче 3.

Задача 5. Обозначим $z_1, \dots, z_n$ корни многочлена A, и пусть $\Omega_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_i| < \varepsilon\}$, $\Psi = \{(z, w) \in M_a \mid z \notin \Omega_1, \dots, z \notin \Omega_n\}$. Докажите, что отображение $h : \Psi \to \Omega_R \setminus \bigcup_i \Omega_i$ является связным двулистным накрытием.

Задача 6. Вычислите эйлерову характеристику поверхности Ψ. Вычислите эйлерову характеристику и род (число g ручек) поверхности M_A.

Задача 7. Решите задачи 4, 5 и 6 для множества $M_{P,Q} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \mid P(w) = Q(z)\}$, где P, Q — многочлены, не имеющие общих критических значений (критическим значением многочлена называется его значение в точке, где его производная равна нулю).