РАССЛОЕНИЕ ХОПФА

Комплексная проективная прямая есть, по определению, $\mathbb{C}P^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{[z:w] \mid z \neq 0 \text{ или } w \neq 0, [z:w] = [\lambda z : \lambda w]\, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Трехмерную сферу S^3 реализуем как множество $S^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$. Расслоение Хопфа $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ задается формулой $p(z,w) = [z:w]$.

Задача 1. Пусть $\alpha > 0$. Докажите, что множества $A_\alpha = \{[z:w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \leq \alpha\}$ и $B_\alpha = \{[z:w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \geq \alpha\}$ гомеоморфны кругам (с общей границей $C_\alpha = \{[z:w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| = \alpha\}$). Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно двумерной сфере S^2.

Задача 2. Докажите, что а) слой расслоения Хопфа гомеоморфен окружности, б) прообраз $p^{-1}(C_\alpha)$ гомеоморфен двумерному тору $S^1 \times S^1$, в) прообразы $p^{-1}(A_\alpha)$ и $p^{-1}(B_\alpha)$ гомеоморфны полноториям $D \times S^1$ (D — двумерный круг).

Таким образом, трехмерная сфера разбита на два полнотория с общей границей — тором.

Задача 3. Докажите, используя результат задачи 2, что расслоение Хопфа — действительно локально тривиальное расслоение.

Задача 4. Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ — стандартно вложенное полноторие ("спасательный круг"). Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus T$ гомеоморфно полноторию без одной точки.

Задача 5. а) Докажите, что множество $D = \{(z,w) \in S^3 \mid w \in [0,1]\}$ гомеоморфно кругу, границей которого служит слой расслоения Хопфа над точкой $[1:0] \in \mathbb{C}P^1$. б) Докажите, что слой расслоения Хопфа над любой точкой, кроме $[1:0]$, пересекает круг D ровно в одной точке.

Иными словами, слой над точкой $[1:0]$ и слой над любой другой точкой "зацеплены". Оказывается, это верно для любых двух слоев. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, и пусть $U_{ab} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — преобразование, заданное формулой $U_{ab}(z,w) = (az + bw, -\overline{b}z + \overline{a}w)$.

Задача 6. Докажите, что преобразование U_{ab} переводит сферу S^3 в себя. Докажите, что существует такое преобразование $\widetilde{U_{ab}} : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, что $\widetilde{U_{ab}} \circ p = p \circ U_{ab}$.

Задача 7. Докажите, что для всякой точки $[s:t] \in \mathbb{C}P^1$ существуют такие a, b, что $U_{ab}([1:0]) = [s:t]$. Выведите отсюда и из результата задачи 5, что любые два слоя расслоения Хопфа зацеплены: для произвольного слоя существует подмножество трехмерной сферы, гомеоморфное кругу, граница которого — данный слой, а любой другой слой пересекает это подмножество ровно в одной точке.

Явные формулы для гомеоморфизма $\mathbb{C}P^1 \to S^2$. (Аффинной) комплексной прямой называется подмножество $L = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid az + bw + c = 0\}$, где $a, b, c \in \mathbb{C}$ фиксированы, и хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля.

Задача 8. Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно множеству комплексных прямых, проходящих через произвольную фиксированную точку пространства $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим множество $\Omega = \{(z,w) \in S^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Задача 9. Докажите, что Ω гомеоморфно двумерной сфере.

Задача 10. Прямая ℓ, заданная уравнением $z = 1$, пересекает множество Ω в единственной точке $(1,0)$. Докажите, что всякая комплексная прямая, отличная от ℓ и проходящая через точку $(1,0)$, пересекает множество Ω еще ровно в одной точке. Выведите отсюда, что Ω гомеоморфно $\mathbb{C}P^1$, и задайте этот гомеоморфизм явными формулами.

Задача 11. Пусть $\varphi : \mathbb{C}P^1 \to S^2$ — гомеоморфизм задачи 10. Задайте явными формулами отображение $\varphi \circ p : S^3 \to S^2$.

Ответ. Точка (x,y,z,t) такая, что $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, отображается в точку (α, β, γ), для которой $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, а именно: $\alpha = 2(xz + yt), \beta = 2(yz - xt), \gamma = x^2 + y^2 - z^2 - t^2$.