РАССЛОЕНИЯ: ПРИЧЕШИ ЕЖА

Задача 1. Бутылка Клейна K это квадрат $[0,1]^2$ с отождествленными следующим образом сторонами: $(x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1,1-y)\, \forall x,y$.Докажите, что отображение $(x,y) \mapsto x$ определяет расслоение бутылки Клейна над окружностью со слоем окружность. Тривиально ли это расслоение? имеет ли оно сечение?

Задача 2. Пусть расслоение $p : E \to B$ со слоем F имеет сечение: $\exists s : B \to E$ такое, что $p \circ s = \mathrm{id}_B$. а) Докажите, что связывающие гомоморфизмы $\partial : \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F)$ в этом случае тривиальны. б) Докажите, что точная гомотопическая последовательность такого расслоения расщепляется: $\pi_i(E) = \pi_i(B) \times \pi_i(F)$.

Указание (к пункту б))**.** Рассмотрите гомоморфизм $s_* : \pi_i(B) \to \pi_i(E)$.

Задача 3. Пусть $W = [0,1]^2 \times S^1 \to [0,1]^2$ — тривиальное расслоение, слой которого над точкой a — векторы единичной длины, приложенные в этой точке. Опишите поднятие тождественной гомотопии $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2$ в пространство расслоения, при котором вектор $X(v)$ направлен к центру квадрата при всех v кроме точек узкого прямоугольника, соединяющего центр с серединой стороны $[0,1] \times \{1\}$.

Векторным полем на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ назовем отображение $X : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что для всякого $a \in S^2$ вектор $X(a)$ перпендикулярен a (т.е. касается сферы в точке a).

Задача 4. Постройте пример векторного поля, равного нулю только в одной точке сферы — северном полюсе. Изобразите окрестность этой точки на рисунке.

Обозначим $V(2,3)$ пространство пар (v_1, v_2) перпендикулярных единичных векторов в $\mathbb{R}^3$.

Задача 5. Докажите, что отображение $(v_1, v_2) \mapsto v_1$ является расслоением $V(2,3)$ над S^2 со слоем S^1.

Задача 6. Вычислите связывающий гомоморфизм $\partial : \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1)$ из точной гомотопической последовательности расслоения задачи 5.

Указание. Этот гомоморфизм можно вычислить непосредственно по определению. Для этого возьмите в качестве образующей группы $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ отображение квадрата в сферу, переводящее всю границу в точку A, лежащую вблизи от северного полюса. При поднятии этого отображения до гомотопии $[0,1] \times [0,1] \to V(2,3)$ используйте векторное поле задачи 4 и конструкцию задачи 3.

Задача 7 ("теорема о причесывании ежа")**.** Докажите, что не существует векторного поля на сфере S^2, нигде не равного нулю.

Задача 8. а) Вычислите точную гомотопическую последовательность расслоения задачи 5, начиная с члена $\pi_3(S^1)$ и до конца. б) Докажите, что $\pi_1(V(2,3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, укажите явно образующую α этой группы и гомотопию, соединяющую петлю 2α с тривиальной петлей. в) Докажите, что $\pi_3(V(2,3)) = \mathbb{Z}$ и укажите явно образующую этой группы.