ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП

Задача 1. Постройте клеточное разбиения и вычислите фундаментальные группы следующих пространств: а) n-мерной сферы с двумя отождествленными точками; б) полнотория; в) полнотория со стянутой границей; г) заполненной сферы с двумя ручками; д) $\mathbb{C}P^n$.

Задача 2. Обозначим $V(2,3)$ пространство пар (v_1, v_2) перпендикулярных единичных векторов в $\mathbb{R}^3$. а) Постройте клеточное разбиение пространства $V(2,3)$. б) Докажите с его помощью, что $\pi_1(V(2,3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. в) Докажите с его помощью, что $V(2,3)$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Указание. Для построения разбиения можно использовать векторное поле с единственным нулем (см. листок "Причеши ежа").

Задача 3. Обозначим P множество пар (ℓ, v), где v — единичный вектор в $\mathbb{R}^3$, а ℓ — перпендикулярная ему прямая, проходящая через начало координат. а) Постройте клеточное разбиение пространства P и вычислите $\pi_1(P)$. б) Докажите, что отображение $(\ell, v) \mapsto v$ определяет расслоение с базой S^2 и слоем S^1. Выпишите точную гомотопическую последовательность этого расслоения и вычислите с ее помощью $\pi_1(P)$. Во что переходят при этом отображении клетки клеточного разбиения пункта а) ? в) Докажите, что отображение $(v_1, v_2) \mapsto (\ell, v_2)$, где ℓ — прямая, проведенная через вектор v_1, определяет накрытие $V(2,3) \to P$ (см. задачу 2). Найдите количество листов этого накрытия, вычислите с помощью этого накрытия группу $\pi_1(P)$ и опишите действие ее на слое. Во что переходят при этом отображении клетки клеточного разбиения пункта а) ?

Задача 4. Элементами множества F_3 являются пары (Π, ℓ), где $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — плоскость, а $\ell \subset \Pi$ — прямая, причем $O \in \ell$ (O — начало координат). а) Постройте клеточное разбиение пространства F_3 и вычислите $\pi_1(F_3)$. б) Докажите, что отображение $p : V(2,3) \to F_3$, сопоставляющее паре (v_1, v_2) прямую, проходящую через v_2 и плоскость, содержащую оба вектора, является накрытием. Определите число листов накрытия и опишите действие группы $\pi_1(F_3)$ на слое. в) Докажите, что отображение $(\Pi, \ell) \mapsto \ell$ определяет расслоение $F_3 \to \mathbb{R}P^2$, и выпишите первые несколько членов его точной гомотопической последовательности.

Задача 5. Пусть X — пространство а) пар б) троек попарно различных точек на окружности, причем точки не нумерованы (т.е. перестановка точек дает тот же элемент множества X). Найдите группу $\pi_1(X)$.

Задача 6. а) Пусть ω_1, ω_2 — две зацепленные окружности в $\mathbb{R}^3$ (каждая пересекает в одной точке внутренность круга, натянутого на другую). Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (\omega_1 \cup \omega_2))$. б) Тот же вопрос, если окружности ω_1, ω_2 не зацеплены (скажем, лежат в параллельных плоскостях).

Указание (к пункту а)). Листок "Расслоение Хопфа", задача 7.

Задача 7. Докажите, что сферы с g ручками при разном g гомотопически не эквивалентны.