ЛЕКЦИЯ 1. ГОМЕОМОРФИЗМ И ГОМОТОПИЯ.

Говорят, что в множестве U введена структура *топологического пространства*, если в нем выделена система непустых подмножеств U_α, называемых открытыми окрестностями, такая что $\bigcup_\alpha U_\alpha = U$ и $\forall \alpha, \beta \exists \gamma : U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$. Отображение $f : X \to Y$ двух топологических пространств называется непрерывным, если для всякой точки $y = f(x) \in Y$ и открытой окрестности $U \ni y$ существует открытая окрестность $V \subset X$ такая, что $x \in V$ и $f(V) \subset U$.

Пример 1. а) $X = \mathbb{R}$, открытые окрестности — интервалы. Понятие непрерывного отображения совпадает с обычным, принятым в курсе анализа. б) Обобщение предыдущего примера: $X = \mathbb{R}^n$, окрестностей — открытые шары $V_r(a) = \{x \mid |x - a| < r\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. в) Еще одна возможность: $X = \mathbb{R}^n$, окрестности — открытые кубы $C_r(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - a_i| < r, \forall i = 1, \dots, n\}$. г) Дальнейшее обобщение: X — произвольное метрическое пространство, окрестности — открытые шары.

Пример 2. Связное двоеточие: $X = \{a, b\}$, открытые окрестности $\{a\}$ и $\{a, b\}$. Придумайте самостоятельно обобщение этого примера, в котором пространство — множество вершин произвольного ориентированного графа.

Пример 3. Экзотический (для нашего курса) пример: X — произвольное бесконечное множество, а открытые окрестности — подмножества $U \subset X$, дополнение к которым $X \setminus U$ конечно.

Пример 4. Топология Зарисского: $X = \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), открытые окрестности — множества, заданные системами неравенств $V_{f_1,\dots,f_N} = \{x \mid f_i(x) \neq 0, \forall i = 1, \dots, N\}$, где $f_1, \dots, f_N$ — многочлены.

Упражнение. Опишите непрерывные отображения из $\mathbb{R}^1$ с топологией Зарисского в $\mathbb{R}^1$ с обычной топологией. Опишите непрерывные отображения из $\mathbb{R}^n$ (с обычной топологией) в пространство примера 3. Проделайте самостоятельно еще несколько таких же упражнений.

Пример 5. Если X — топологическое пространство, а $Y \subset X$, то в Y можно ввести структуру топологического пространства, в котором открытыми окрестностями являются пересечения открытых окрестностей пространства X с множеством Y.

Пример 6. Если X, Y — два топологических пространства, то можно ввести структуру топологического пространства на их декартовом произведении $X \times Y$, приняв за открытые окрестности декартовы произведения открытых окрестностей в X и Y (проверьте, что необходимые свойства выполнены !). В частности, топология на $\mathbb{R}^n$, в которой открытые окрестности — кубы, получена $(n-1)$-кратным применением этой конструкции к обычной топологии в $\mathbb{R}^1$.

Отображение $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно непрерывно, обратимо и обратное к нему тоже непрерывно; топологические пространства X и Y называются гомеоморфными.

Пример 7. Пространство $\mathbb{R}^n$ с топологией, в которой открытые окрестности — шары, гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ с окрестностями-кубами. Гомеоморфизмом является тождественное отображение.

Пример 8. $\mathbb{R}^n$ с топологией Зарисского не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией (докажите !). Тождественное отображение $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \text{обычн.}) \to (\mathbb{R}^n, \text{Зарисск.})$ непрерывно и обратимо, а его обратное $\mathrm{id} : (\mathbb{R}^n, \text{Зарисск.}) \to (\mathbb{R}^n, \text{обычн.})$ непрерывным не является.

В топологии изучают свойства, инвариантные при гомеоморфизмах.

Пример 9 (топологического свойства). Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если $\forall a, b \in X$ существует непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$ такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$. В частности, пространство $\mathbb{R}^n$ линейно связно, линейно связны отрезок и окружность, а также связное двоеточие (почему ?).

Упражнение. Является ли $\mathbb{R}^n$ с топологией Зарисского линейно связным ?

Линейная связность сохраняется при гомеоморфизмах и поэтому доставляет простейший способ доказательства негомеоморфности топологических пространств.

Пример 10. Окружность $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ не гомеоморфна отрезку $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Действительно, при удалении точки $1/2$ из отрезка оставшееся множество не будет линейно связным. А при удалении любой точки из окружности линейная связность не нарушается.

Пример 11 (топологической теоремы — теорема Брауэра). Всякое непрерывное отображение n-мерного шара в себя $f : D^n \to D^n$ имеет неподвижную точку: $\exists x \in D^n : f(x) = x$.

Это топологическая теорема, поскольку если она верна для шара, то автоматически верна и для любого пространства, гомеоморфного шару. Из теоремы Брауэра следует, например, что система уравнений

$$\begin{cases} x &= \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \dfrac{y}{2} \\ y &= \ln(x^2 + y^2 + 1) + 2 \end{cases}$$

имеет (хотя бы одно) вещественное решение. Действительно, отображение, заданное правой частью этих уравнений, непрерывно и отображает квадрат $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \le R\}$ в себя, если R достаточно велико.

Доказательство теоремы Брауэра для $n = 1$. Одномерный шар это просто отрезок $[0, 1]$. Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ — непрерывное отображение; тогда $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$ (в противном случае неподвижная точка найдена). Функция $g(x) = f(x) - x$ принимает, тем самым, положительное значение в точке $x = 0$ и отрицательное — в точке $x = 1$. По теореме о промежуточном значении $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ в некоторой точке $x \in [0, 1]$. $\square$

Непрерывные отображения $f_0 : X \to Y$ и $f_1 : X \to Y$ называются *гомотопными* (обозначение $f_0 \sim f_1$), если существует непрерывное отображение $F : X \times [0,1] \to Y$ (называемое гомотопией), для которого $F(x,0) \equiv f_0(x)$, $F(x,1) \equiv f_1(x)$.

Пример 12. Тождественное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя гомотопно отображению, переводящему все точки в начало координат; гомотопия $F(x,t) = (1-t)x$.

Пример 13. Тождественное отображение множества $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$ в себя не гомотопно отображению, меняющему местами точки. Тождественное отображение окружности в себя не гомотопно отображению в точку — этот факт будет доказан в курсе позднее.

Топологические пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, композиции которых (в обоих порядках) гомотопны соответствующим тождественным отображениям: $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$, $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$. Очевидно, гомеоморфные пространства гомотопически эквивалентны. Нетрудно проверить, что гомотопическая эквивалентность — действительно эквивалентность.

Пример 14. Пример 12 означает, что пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно пространству, состоящему из одной точки p (как говорят, стягиваемо). Пару "гомотопически обратных" отображений составляют единственное существующее отображение $f : \mathbb{R}^n \to \{p\}$ и отображение $g : \{p\} \to \mathbb{R}^n$ такое, что $g(p) = 0$.

Пример 15. Окружность гомотопически эквивалентна плоскости, из которой удалили начало координат. Также окружности гомотопически эквивалентны цилиндр и лента Мебиуса (докажите !).

Множество классов гомотопии непрерывных отображений $\varphi : X \to Y$ обозначают $[X,Y]$. Всякое непрерывное отображение $f : Y_1 \to Y_2$ порождает отображение $f_* : [X,Y_1] \to [X,Y_2]$, где X — произвольное пространство: классу гомотопии отображения φ ставится в соответствие класс гомотопии отображения $f \circ \varphi$.

Упражнение. Проверьте, что это определение корректно, т.е. полученный класс гомотопии не зависит от того, какой представитель выбран в первоначальном классе.

Вот некоторые свойства множеств $[X,Y]$ и отображений f_*:

Предложение. 1. *Если $f \sim g$, то $f_* = g_*$.*
2. *$(f \circ h)_* = f_* \circ h_*$.*
3. *Если $f : Y_1 \to Y_2$ — гомотопическая эквивалентность, то f_* — взаимно однозначное соответствие.*
4. *Если Y — стягиваемо, то $[X,Y]$ состоит из одного элемента.*

Доказательство. 1. Пусть F — гомотопия между f и g. Тогда для всякого $\varphi : X \to Y_1$ отображение $F \circ \varphi$ — гомотопия между отображениями $f \circ \varphi$ и $g \circ \varphi$. Тем самым $f_*([\varphi]) = g_*([\varphi])$ (скобки обозначают класс гомотопии).

2. Очевидно.

3. Пусть g — "гомотопически обратное" к f отображение. Тогда $g \circ f \sim \mathrm{id}_{Y_1}$, откуда $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_{Y_1})_* = \mathrm{id}_{[X,Y_1]}$, и аналогично $f_* \circ g_* = \mathrm{id}_{[X,Y_2]}$.

4. Следует из 3 и того факта, что $[X,\{p\}]$ состоит из 1 элемента. □