ЛЕКЦИЯ 10. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Говорят, что в топологическом пространстве X задана структура конечного клеточного пространства, если задано его разбиение $X = \bigsqcup_{i=0}^{N} \bigsqcup_{\alpha\in A_i} e_\alpha^{(i)}$ на конечное количество непересекающихся подмножеств, причем для каждого $e_\alpha^{(i)}$ существует непрерывное отображение $f_\alpha^{(i)} : D_i \to X$, где D_i — i-мерный шар, такое что $f_\alpha^{(i)}\Big|_{\mathrm{Int}(D_i)}$ — гомеоморфизм внутренности $\mathrm{Int}(D_i)$ шара на множество $e_\alpha^{(i)}$, а образ границы $\partial D_i = D_i \setminus \mathrm{Int}(D_i)$ лежит в объединении множеств $e_\beta^{(j)}$ с $j < i$. Множества $e_\alpha^{(i)}$ называются клетками, i — размерностью клетки, $f_\alpha^{(i)}$ — характеристическим отображением. Объединение клеток размерности не выше i называется i-м остовом клеточного пространства.

Пример 1. Разбиение $S^n = e^{(0)} \cup e^{(n)}$, где $e^{(0)}$ — северный полюс, а $e^{(n)}$ — дополнение к нему, является клеточным разбиением сферы. i-й остов состоит при $i < n$ из одной точки, а при $i \geq n$ совпадает со всей сферой.

Пример 2. Разбиение границы куба $\partial([0,1]^n)$ на открытые грани всех размерностей дает еще одно клеточное разбиение сферы — на $3^n - 1$ клеток.

Пример 3. Склеивание сферы с g ручками или лентами Мебиуса из $4g$-угольника задает ее клеточное разбиение с 1 клеткой размерности 0, $2g$ клетками размерности 1 и 1 клеткой размерности 2. 1-остов этого разбиения представляет собой букет $2g$ окружностей.

Пример 4. Зафиксируем в $\mathbb{R}^{n+1}$ базис $v_0, \dots, v_n$. Разобьем пространство $\mathbb{R}P^n$ прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$ на клетки $e^{(0)}, \dots, e^{(n)}$, где $e^{(i)}$ — множество прямых, лежащих в подпространстве $V_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$, порожденном $v_0, \dots, v_i$, но не лежащих в V_{i-1}. Это клеточное разбиение с единственной клеткой каждой размерности от 0 до n, причем i-й остов гомеоморфен $\mathbb{R}P^i$. Действительно, рассмотрим верхнюю полусферу $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1$, $x_n \geq 0$, и отобразим ее на $\mathbb{R}P^n$, проведя прямую через каждую ее точку и начало координат. Полусфера гомеоморфна D_n, ее внутренность задана условием $x_n > 0$, и отображается гомеоморфно на множество прямых, не лежащих в пространстве V_{n-1}, заданном условием $x_n = 0$, т.е. на $e^{(n)}$. Граница полусферы при этом отображается в дополнение к $e^{(n)}$, т.е. в объединение $e^{(i)}$ с $i < n$. Это отображение — не гомеоморфизм: у каждой точки имеется 2 прообраза. Для прочих $e^{(i)}$ характеристические отображения строятся аналогично.

Пример 5. Надстройка над клеточным пространством обладает естественным разбиением на клетки; прямое произведение двух конечных клеточных пространств — конечное клеточное пространство (постройте явно соответствующие разбиения !).

Теорема 1. *Пусть X — конечное клеточное пространство с единственной 0-мерной клеткой, и пусть $\iota : X^{(1)} \to X$ — вложение 1-остова X в само пространство X. Тогда отображение $\iota_* : \pi_1(X^{(1)}) \to \pi_1(X)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Выберем нульмерную клетку пространства X в качестве отмеченной точки. Нам нужно доказать, что всякая петля в X гомотопна петле, лежащей в $X^{(1)}$. Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — петля; рассмотрим множество точек $C_\alpha^{(i)} = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in e_\alpha^{(i)}\}$. Если $i > 1$, то петля γ гомотопна петле, не проходящей через некоторую точку $a \in e_\alpha^{(i)}$; без ограничения общности ее можно считать центром шара. Пусть U_t — гомотопия i-мерного шара без точки центра такая, что $U_0 = \mathrm{id}$, а U_1 — проекция на границу шара. Композиция $f_\alpha^{(i)} \circ U_t$ дает гомотопию петель, в результате которой получается петля, не пересекающая клетку $e_\alpha^{(i)}$. Очевидно, новая петля не пересекает также никаких клеток размерности i и выше, которых не пересекала до гомотопии. Таким образом, можно применить эту гомотопию сначала к клеткам максимальной размерности, затем следующей, и т.п., в результате чего останется петля в $X^{(1)}$. □

Следствие. *$\pi_1(X)$ является факторгруппой свободной группы с n образующими $\beta_1 \dots, \beta_n$, где n — количество одномерных клеток в X.*

Доказательство. Действительно, поскольку нульмерная клетка одна, остов $X^{(1)}$ гомеоморфен букету из n окружностей. □

Ограничение $f_\alpha^{(2)} : D_2 \to X$ на границу $\partial D_2 = S^1$ задает отображение $\varphi_\alpha : S^1 \to X^{(1)}$. Это отображение задает петлю в X с началом в отмеченной точке с точностью до сопряжения; обозначим эту петлю опять же φ_α, но при этом $\varphi_\alpha \leftrightarrow \tau\varphi_\alpha\tau^{-1}$.

Теорема 2. *Ядром отображения ι_* из теоремы 1 является нормальная подгруппа в $\pi_1(X^{(1)}$, порожденная всеми элементами φ_α, $\alpha \in A_2$.*

Поскольку подгруппа нормальная, замена элемента φ_α на сопряженный ее не меняет. Коротко говорят так: $\pi_1(X)$ порождено образующими β_i, соответствующими одномерным клеткам, с соотношениями φ_α, соответствующими двумерным клеткам.

Доказательство. Прежде всего, всякий элемент описываемой подгруппы равен произведению элементов вида $\tau\varphi_\alpha^{\pm 1}\tau^{-1}$. Каждая петля такого вида представляет собой отображение границы круга в X и, следовательно, стягиваема в X.

Пусть, наоборот, $\gamma \in \operatorname{Ker} \iota_*$, т.е. представляет собой петлю в $X^{(1)}$, стягиваемую в X. Иными словами, существует отображение $\Gamma : D_2 \to X$ такое, что $\Gamma|_{\partial D_2} = \gamma$, а центр круга переводится в отмеченную точку. Приемом, аналогичным доказательству теоремы 1, заменим Γ на отображение, образ которого лежит в $X^{(2)}$ (его мы опять обозначим Γ).

Обозначим $r(u)$ расстояние от точки $u \in e_\alpha^{(2)}$ до центра клетки (клетка гомеоморфна кругу радиуса 1, так что это можно сделать). Разобьем D_2 на треугольники настолько мелкие, чтобы диаметр образа каждого из них не превосходил 1/3. Пусть K — объединение треугольников, образы которых целиком лежат в одной какой-нибудь двумерной клетке, и пусть $\Gamma' : K \to X^{(2)}$ — отображение, совпадающее с Γ в вершинах треугольников и аффинное в каждом из них. Отображения $\Gamma : K \to X^{(2)}$ и $\Gamma' : K \to X^{(2)}$ гомотопны; пусть Γ_t — соответствующая гомотопия. Определим отображение $\Gamma'' : D_2 \to X^{(2)}$ формулой $\Gamma''(x) = \begin{cases} \Gamma_0(x) = \Gamma(x), \text{если } \varrho(\Gamma(x)) \geq 2/3 \\ \Gamma_1(x) = \Gamma'(x), \text{если } \varrho(\Gamma(x)) \leq 1/3 \\ \Gamma_{2-3\varrho(\Gamma(x))}, \text{если } 1/3 \leq \varrho(\Gamma(x)) \leq 2/3 \end{cases}$. Отображение $\Gamma'' : D_2 \to X^{(2)}$ представляет собой гомотопию петли γ в точку, и кусочно-линейно в точках грани, находящихся на расстоянии не более 1/3 от центра. Выберем близко к центру грани круг δ_α, не пересекающийся с образами вершин и ребер триангуляции; тогда его прообраз при отображении Γ'' — эллипс в D_2. Рассмотрим теперь отображение $\omega : X^{(2)} \to X^{(2)}$, растягивающее каждый круг δ_α во всю внутренность соответствующей клетки. Теперь композиция $\omega \circ \Gamma'' : D^2 \to X^{(2)}$ — отображение, переводящее в $X^{(1)}$ весь круг, кроме конечного числа непересекающихся эллипсов E_α, $\alpha \in A_2$, а на эллипсах линейное.

Отметим на границе круга D_2 точку a, образ которой — отмеченная точка пространства X, и соединим ее непересекающимися путями σ_α с какими-нибудь точками эллипсов E_α. Тогда граница круга гомотопна петле $(\sigma_1\varrho_1\sigma_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (\sigma_m\varrho_m\sigma_m^{-1})$, где m — количество двумерных клеток, а петля ϱ_α — граница эллипса E_α. Образ этой петли гомотопен $(\tau_1\varphi_1^{\pm 1}\tau_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (\tau_m\varphi_m^{\pm 1}\tau_m^{-1})$, т.е. элементу нужной подгруппы. □

Пример 6. $\pi_1(S^n) = 0$ при $n > 1$, поскольку 1-остов клеточного разбиения примера 1 не содержит одномерных клеток.

Пример 7. Клеточное разбиение $\mathbb{R}P^n$ из примера 4 содержит единственную одномерную клетку, и поэтому группа $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ порождена единственной образующей β. Характеристическое отображение единственной двумерной клетки переводит границу круга в 2β; поэтому соотношение есть $2\beta = 0$, откуда $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пример 8. Клеточное разбиение примера 3 показывает, что если M_g — сфера с g ручками, то $\pi_1(M_g)$ порождена образующими $c_1, \dots, c_{2g}$ и соотношением $c_1c_2c_1^{-1}c_2^{-1}\dots c_{2g-1}c_{2g}c_{2g-1}^{-1}c_{2g}^{-1} = 1$.

Из теоремы 2 следует, что $\pi_1(X) = \pi(X^{(2)})$. На самом деле, это вытекает уже из того замечания в доказательстве, что всякую гомотопию петель можно "уложить" в $X^{(2)}$. То же самое верно и для сфероидов произвольной размерности, откуда вытекает, что $\pi_n(X) = \pi_n(X^{(n+1)})$.