ЛЕКЦИЯ 11. ГРУППА КОС

Кривая $\gamma = (x_1, \dots, x_n) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ называется гладкой, если все функции x_i дифференцируемы и $\sum_{i=1}^n (x_i'(t))^2 > 0$ при всех $t \in [0,1]$; ненулевой вектор $\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ определяет касательную к кривой в точке $\gamma(t)$. Гладкая кривая называется замкнутой, если $\gamma(0) = \gamma(1)$ и $\gamma'(0) = \gamma'(1)$. Узлом называется гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^3$, не имеющая точек самопересечения: если $t_1 \neq t_2$, то $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Зацеплением называется конечный набор узлов в $\mathbb{R}^3$, не имеющих общих точек. Зацепление можно рассматривать как гладкое несамопересекающееся вложение $f : \bigsqcup_{i=1}^N S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (в левой части стоит несвязное объединение N окружностей).

Проекция g зацепления f на плоскость (т.е. композиция отображения f с проекцией $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — это многокомпонентная кривая на плоскости) называется диаграммой зацепления, если:

1. Кривая $g : \bigsqcup_{i=1}^N S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкое погружение, т.е. все кривые $g_i : (S^1)_i \to \mathbb{R}^2$ — гладкие.
2. Все самопересечения кривой g — простые, т.е. у каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$ имеется не больше 2 прообразов (неважно, на одной компоненте или на разных).
3. Все самопересечения кривой g — трансверсальные, т.е. касательные прямые к двум пересекающимся ветвям кривой в точке пересечения не совпадают (опять-таки, неважно, одна компонента пересекается или разные).

Из 3 следует (докажите !), что диаграмма имеет лишь конечное число точек самопересечения. Если стандартная проеция зацепления на (горизонтальную) плоскость является его диаграммой, то назовем зацепление правильным.

Два зацепления f_0, f_1 называются изотопными, если существует семейство D_t, $t \in [0,1]$ гомеоморфизмов плоскости такое, что $D_0 = \mathrm{id}$ и $D_1(f_0) = f_1$; изотопией называют либо семейство D_t, либо семейство зацеплений $f_t = D_t(f_0)$.

При рисовании диаграмм в каждой точке самопересечения указывают, какая из двух ветвей идет ниже — ее прерывают, а верхнюю оставляют непрерывной. Основой теории узлов является следующая теорема, которую мы доказывать не будем:

Теорема 1 (Рейдемейстер). *Для всякого зацепления существует изотопное ему правильное зацепление (на самом деле изотопию можно сделать произвольно малым шевелением). Если f_0 и f_1 — два изотопных зацепления, то изотопию f_t между ними можно выбрать такой, чтобы*

1. *Для всех t, кроме конечного числа, f_t являлась бы правильным зацеплением.*
2. *В оставшихся (“исключительных”) значениях t проекция зацепления на плоскость претерпевала бы ровно одно из трех “преобразований Рейдемейстера”, показанных на рис. 1.*

Обозначим X_n пространство неупорядоченных наборов $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ попарно несовпадающих точек на плоскости. Группа $\pi_1(X_n)$ называется группой кос из n нитей и обозначается B_n. Отметим в пространстве X_n точку u_* такую, что $(u_*)_k = (k, 0)$. Тогда петлю в пространстве X_n можно изобразить как набор кривых $(x_1(t), y_1(t)), \dots, (x_n(t), y_n(t))$, где $x_k(0) = k$, $y_k(0) = y_k(1) = 0$, а числа $x_1(1), \dots, x_n(1)$ образуют некоторую перестановку τ чисел $1, 2, \dots, n$.

Петле в X_n удобно сопоставить набор кривых $(x_1(t), y_1(t), t), \dots, (x_n(t), y_n(t), t)$ в $\mathbb{R}^3$ — этот набор и называют косой. При этом умножение петель выглядит, как “прикладывание” одной косы поверх другой. Косы не имеют самопересечений, но не являются зацеплениями, поскольку не замкнуты. Тем не менее, теорема Рейдемейстера к ним приложима.

В пространстве X_n имеются выделенные петли σ_k, $k = 1, \dots, n-1$: точки u_k и u_{k+1} делают полоборота против часовой стрелки вокруг точки $(k + 1/2, 0)$ (меняясь при этом местами), а остальные точки остаются на месте.

Теорема 2 (Артин). *Группа B_n порождена гомотопическими классами петель $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями такого вида (для всех i, j):*

1. $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, *если* $|i - j| \geq 2$.
2. $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Набросок доказательства. Пусть σ — коса из n нитей. В качестве диаграммы косы используем ее проекцию на плоскость xz. По теореме Рейдемейстера коса σ изотопна правильной косе, которую мы опять обозначим σ; пусть точки самопересечения диаграммы косы σ имеют координаты $(x_1, z_1), \dots, (x_N, z_N)$. Нетрудно видеть, что коса σ изотопна (и тоже при помощи произвольно малого шевеления) косе, у которой все числа

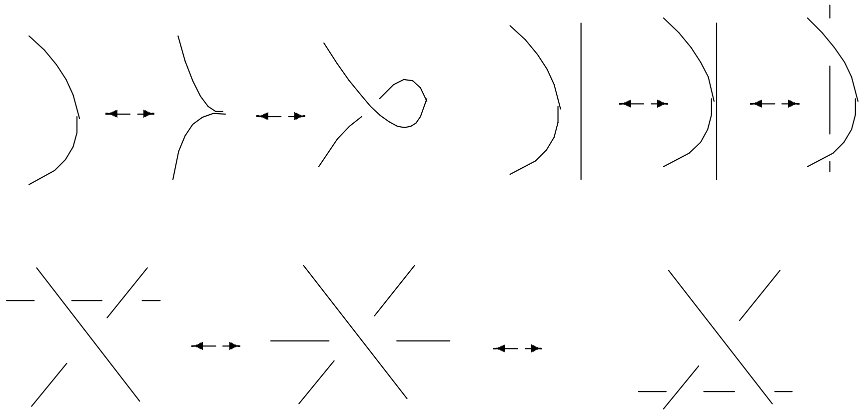

Figure 1. Преобразования Рейдемейстера

$z_1, \ldots, z_N$ различны. Разрежем теперь картинку на куски горизонтальными прямыми $z = c_1, \ldots, z = c_{N-1}$ так, чтобы между каждыми двумя прямыми лежала ровно одна точка самопересечения диаграммы. Нетрудно видеть, что так определено представление $\sigma = \sigma_{i_1}^{\pm 1} \ldots \sigma_{i_N}^{\pm 1}$, откуда следует, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1}$ являются образующими группы B_n.

Представление $\sigma = \sigma_{i_1}^{\pm 1} \ldots \sigma_{i_N}^{\pm 1}$ однозначно определяет, с точностью до гомотопии, диаграмму косы, в которой все точки самопересечения расположены на разной высоте. Рассмотрим два таких представления одной и той же косы, т.е. две изотопных диаграммы g_0, g_1, и пусть g_t — изотопия между ними, существование которой утверждается в теореме Рейдемейстера. На интервалах переменной t, в которых g_t остается диаграммой, единственное, что может происходить — точки самопересечения попадают на один уровень. Нетрудно видеть, что можно добиться того, чтобы это происходило лишь в конечном числе значений $t_1, \ldots, t_k$, чтобы равенство $(z_{t_i})_p = (z_{t_i})_q$ выполнялось каждый раз только для одной пары индексов p, q, и при этом при $t_i - \varepsilon < t < t_i$ было бы $(z_{t_i})_p < (z_{t_i})_q$, а при $t_i < t < t_i + \varepsilon$ наоборот. Нетрудно видеть, что это соответствует замене $\sigma_i \sigma_j \mapsto \sigma_j \sigma_i$ в слове, соответствующем диаграмме, причем индексы i, j не соседние.

Первое преобразование Рейдемейстера при изотопии кос невозможно (почему ?). При втором преобразовании в слове, соответствующем диаграмме, происходит замена $\sigma_i \sigma_i^{-1} \leftrightarrow e$. При третьем — замена $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. Из теоремы Рейдемейстера следует, что других соотношений нет. □

Сопоставляя косе σ перестановку τ ее концов, получим отображение $B_n \to \Sigma_n$ группы кос в группу перестановок. Нетрудно видеть, что это эпиморфизм. Отсюда следует, что группа перестановок — факторгруппа группы кос. При этом эпиморфизме образующие σ_i переходят в транспозиции $\lambda_i = (i, i+1)$. Транспозиции удовлетворяют соотношениям Артина и, кроме того, являются инволюциями: $\lambda_i^2 = 1$. Из эпиморфности следует, что группа перестановок порождена элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Можно показать (проделайте это !), что соотношения Артина и соотношения $\lambda_i^2 = 1$ это все соотношения в группе перестановок.

Рассмотрим раскраски диаграммы узла в три цвета (каждую непрерывную дугу на диаграмме раскрашиваем в один цвет). Назовем раскраску правильной, если в каждой точке самопересечения три цвета пересекающихся дуг либо все различны, либо все одинаковы.

Теорема 3. *Число правильных раскрасок диаграммы узла не зависит от выбора диаграммы (а только от самого узла) и одинаково для изотопных узлов.*

Идея доказательства. состоит в том, что, согласно Теореме 1, достаточно проверить, что число правильных раскрасок не меняется при преобразованиях Рейдемейстера. Рассмотрим первое преобразование (рождение петли). Поскольку в точке, появившейся после рождения петли, сходятся не три различных дуги, а только две (или, возможно, даже одна), то в любой правильной раскраске эти дуги должны быть раскрашены одинаково. Тогда каждой раскраске диаграммы без петли мы однозначно сопоставим раскраску диаграммы с петлей — две вновь появившихся дуги просто наследуют цвет дуги, на которой образовалась петля. Очевидно, условие правильности раскраски при этом нарушиться не может, и так мы получим все возможные правильные раскраски. Значит, число правильных раскрасок при первом преобразовании Рейдемейстера не меняется. Для двух остальных преобразований Рейдемейстера рассуждение столь же элементарно, но длиннее — мы не будем проводить его подробно. □

Теорема 3 позволяет доказать, что узлы, изображенные на рисунке 2 (они называются *тривиальным узлом* и *трилистником*), не изотопны. Действительно, для тривиального узла число правильных раскрасок равно 3, а для трилистника — 9.

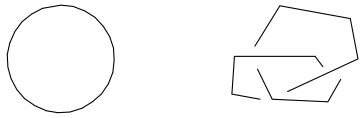

Figure 2. Тривиальный узел и трилистник