ЛЕКЦИЯ 2. НАКРЫТИЯ.

Пусть P — дискретное топологическое пространство (то есть пространство, каждое одноточечное подмножество которого является открытой окрестностью), а X, Y — произвольные топологические пространства. Накрытием $f : Y \to X$ со слоем P называется непрерывное отображение, такое что для каждой точки $x \in X$ существует ее открытая окрестность $U \ni x$, прообраз которой $f^{-1}(U) \subset Y$ гомеоморфен $U \times P$, а отображение f, ограниченное на этот прообраз, есть проекция $U \times P \to U$ декартового произведения на первый сомножитель.

Пример 1. Гомеоморфизм является накрытием со слоем из одной точки. Обобщение: $Y = X \times P$, f — проекция.

Морфизмом накрытий $f_1 : Y_1 \to X$ и $f_2 : Y_2 \to X$ называется непрерывное отображение $F : Y_1 \to Y_2$ такое, что $f_1 = f_2 \circ F$. Морфизм называется изоморфизмом, если существует обратный морфизм. Накрытие, изоморфное накрытию предыдущего примера, называется тривиальным (со слоем P).

Пример 2. Пусть $X = S^1$ — единичная окружность на плоскости, $Y = \mathbb{R}^1$. Отображение f сопоставляет числу φ точку окружности с полярным углом $2\pi\varphi$. Это отображение — накрытие со счетным слоем P. Это накрытие нетривиально, поскольку накрывающее пространство линейно связно и тем самым не гомеоморфно $S^1 \times P$.

Пример 3. Пусть X — букет двух окружностей, т.е. объединение двух окружностей A и B с одной общей точкой p. Свободной группой с образующими a, b называется группа F_2, элементами которой являются слова из букв a, b, a^{-1}, b^{-1} с таким условием: буквы a и a^{-1}, а также буквы b и b^{-1} не стоят подряд (в любом порядке). Умножение в этой группе заключается в приписывании слов друг к другу, причем возникающие при этом сочетания типа aa^{-1} вычеркиваются. Элементом группы считается также пустое слово, это единичный элемент.

Над X рассмотрим три накрытия Y_1, Y_2, Y_3. Пространство Y_1 это граф, вершины которого соответствуют элементам группы F_2, а ребро между вершинами $r \in F_2$ и $s \in F_2$ проводится тогда и только тогда, когда $r = sa$, $r = sa^{-1}$, $r = sb$ или $r = sb^{-1}$, так что каждая вершина графа имеет степень 4. Отображение $f_1 : Y_1 \to X$ переводит все вершины графа в точку p, а ребра — в окружность A (в первом и втором случае) или в B (в третьем и четвертом — уточните эту конструкцию !). Пространство Y_2 представляет собой вещественную прямую $\mathbb{R}$, к каждой целой точке $n \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ которой приклеено по окружности. При отображении $f_2 : Y_2 \to X$ все приклеенные окружности отображаются (гомеоморфно) в A, а прямая отображается в B так, как описано в примере 2 (целые точки переходят в p). Пространство Y_3 представляет собой отрезок $[-1, 1]$, к середине которого приклеена окружность, а к концам — графы, подобные Y_1 (так что все вершины полученного графа, включая -1

и 1, имеют степень 4). При отображении $f_3 : Y_3 \to X$ окружность переходит в A, отрезки $[0, 1]$ и $[-1, 0]$ — в B, а в дальнейшем все устроено так же, как в f_1.

Между накрытиями Y_1, Y_2, Y_3 имеются морфизмы. Для того, чтобы задать морфизм, фактически достаточно указать, куда переходят вершины. Отображение $P_{12} : Y_1 \to Y_2$ переводит вершину, соответствующую слову r, в вершину $n \in \mathbb{Z}$, равную числу букв b в этом слове, минус число букв b^{-1}. Отображение P_{13} переводит все вершины вида a^n, $n \in \mathbb{Z}$, в точку 0, вершины b и b^{-1} в точки 1 и -1 соответственно, а между остальными вершинами устанавливает очевидное взаимно однозначное соответствие.

Задача. Нарисуйте графы Y_1, Y_2 и Y_3. Проверьте, что существует также морфизм $P_{32} : Y_3 \to Y_2$ такой, что $P_{12} = P_{32} \circ P_{13}$.

Теорема 1. *Пусть $f : Y \to X$ — накрытие, пространства X и Y линейно связны, и в них отмечены точки $p \in X$, $q \in Y$, такие что $f(q) = p$. Тогда гомоморфизм фундаментальных групп $f_* : \pi_1(Y, q) \to \pi_1(X, p)$ является мономорфизмом (вложением).*

Доказательство. Для произвольного топологического пространства A и непрерывного отображения $g : A \to X$ назовем его *поднятием*, или *накрывающим отображением*, непрерывное отображение $h : A \to Y$ такое, что $g = f \circ h$.

Выведем сначала утверждение теоремы из следующей леммы:

Лемма (о накрывающей гомотопии)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и задана гомотопия $G : [0, 1]^n \times [0, 1] \to X$. Пусть, по определению, $g(x) = G(x, 0)$ (при $\forall x \in [0, 1]^n$), и $\widetilde{g}(x, t) = G(x, t)$ при $\forall x \in \partial[0, 1]^n$ и $\forall t \in [0, 1]$ (символом ∂ обозначают границу). Пусть зафиксировано поднятия h отображения g и поднятие $\widetilde{h}$ отображения h. Тогда существует и единственно поднятие H гомотопии G такое, что $H(x, 0) = h(x)$ при $x \in [0, 1]^n$ и $H(x, t) = \widetilde{h}(x, t)$ при $\forall x \in \partial[0, 1]^n$ и $\forall t \in [0, 1]$*

Пусть γ — петля в Y, такая что петля $f \circ \gamma$ стягиваема. Рассмотрим гомотопию G, осуществляющую это стягивание, так что $G(s, 0) = f(\gamma(s))$, $G(s, 1) \equiv p$, и $G(0, t) = G(1, t) \equiv p$. Согласно лемме, существует поднятие этой гомотопии — отображение $H : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$, для которого $H(s, 0) \equiv \gamma(s)$, $f \circ H = G$ и $H(0, t) \equiv q$. Отсюда получаем, что $H(a, 1) \equiv q$, и, следовательно, гомотопия H осуществляет стягивание петли γ. Это означает, что ядро гомоморфизма $f_* : \pi_1(Y, q) \to \pi_1(X, p)$ состоит только из единичного элемента, что и требовалось доказать.

Докажем теперь лемму. Доказательство производится индукцией по n; удобно считать (продумайте !), что при $n = -1$ куб $[0, 1]^n$ — пустое множество, и этот случай составляет (тривиальную) базу индукции. Как пример индуктивного перехода, докажем утверждение для $n = 0$ (общий случай аналогичен — проведите это доказательство в качестве упражнения). В этом случае G — просто непрерывная кривая в X, а H — ее поднятие, причем задана точка $q = H(0)$ такая, что $f(q) = p = G(0)$. Рассмотрим множество T тех $t \in [0, 1]$, для которых на отрезке $[0, t]$ требуемое поднятие существует и единственно; $T \neq \varnothing$, поскольку $0 \in T$. Пусть $t_* \in T$; рассмотрим такую окрестность U точки $G(t_*)$, что $f^{-1}(U) \approx U \times P$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $G(t) \in U$ при $t_* - \varepsilon < t < t_* + \varepsilon$. Пусть V_0 — компонента линейной связности множества $f^{-1}(U)$, содержащая точку $H(t_*)$. Поскольку $f|_{V_0} : V_0 \to U$

— гомеоморфизм, мы можем (и обязаны) положить $H(t) = (f|_{V_0})^{-1}(G(t))$ при $t_* - \varepsilon < t < t_* + \varepsilon$. Значит, такие t также принадлежат множеству T, которое тем самым открыто.

С другой стороны, пусть $t \in T$ при всех $t_* - \varepsilon < t < t_*$. Поскольку $G(t) \in U$, и пространство P дискретно, все точки $H(t)$, $t_* - \varepsilon < t < t_*$, принадлежат одной и той же компоненте линейной связности V_0 множества $f^{-1}(U)$. Поэтому можно и должно положить $H(t_*) = V_0 \cap f^{-1}(G(t_*))$. Значит, $t_* \in T$, откуда следует, что T замкнуто.

Непустое, открытое и замкнутое множество $T \subset [0,1]$ совпадает со всем отрезком. Лемма доказана, а вместе с нею и теорема. $\square$

Пусть $a \in \pi_1(X,p)$ — какой-то элемент фундаментальной группы. Рассмотрим произвольную петлю γ в пространстве X с началом в точке p, реализующую элемент a. Согласно лемме, существует и единственно поднятие $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to Y$ такое, что $\widetilde{\gamma} = q$. Из той же леммы следует, что точка $\widetilde{\gamma}(1) \in f^{-1}(p)$ не меняется при гомотопии петли γ и, следовательно, зависит только от класса a; обозначим эту точку $R_a(q)$.

Теорема 2. *$R_{ab}(q) = R_b(R_a(q))$, т.е. R представляет собой действие группы $\pi_1(X,p)$ на слое $f^{-1}(p)$ накрытия над точкой p. Стационарная подгруппа точки $y \in f^{-1}(p)$ при этом действии есть группа $G = f_*(\pi_1(Y,q))$, изоморфная группе $\pi_1(Y,q)$, а точки орбиты взаимно однозначно соответствуют правым смежным классам группы $\pi_1(X,p)$ по подгруппе G.*

Теорема следует непосредственно из определения умножения в $\pi_1(X)$.

Следствие 1. *Если Y односвязно (что означает, что оно линейно связно и $\pi_1(Y)$ тривиальна), то элементы группы $\pi_1(X,p)$ взаимно однозначно соответствуют элементам слоя $f^{-1}(p)$. Действие R при этом изоморфно действию группы $\pi_1(X,p)$ на себе левыми сдвигами (т.е. $R_a(b) = ab$).*

Следствие 2. *Количество элементов слоя накрытия $f : Y \to X$ равна индексу подгруппы $f_*(\pi_1(Y))$ в группе $\pi_1(X)$.*

Следствие 3. *$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $f : \mathbb{R} \to S^1$ из примера 2. Пространство $\mathbb{R}$ стягиваемо и, следовательно, односвязно. Элементы $\pi_1(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками прообраза $f^{-1}(0)$, т.е. с целыми числами. Если $\widetilde{n} \in \pi_1(S^1)$ — элемент, соответствующий числу $n \in \mathbb{Z}$, то нетрудно видеть, что $R_{\widetilde{n}}(m) = n + m$. Из последнего утверждения следствия 1 вытекает теперь, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. $\square$

Аналогично доказывается, что π_1(букета двух окружностей) $= F_2$ (рассмотрите накрытие Y_1 из примера 3).