ЛЕКЦИЯ 3. НАКРЫТИЯ И ПОДГРУППЫ.

Теорема 1 (свойство универсальности односвязного накрытия). *Пусть $f : Y \to X$ — накрытие, причем пространство Y односвязно (т.е. линейно связно и $\pi_1(Y)$ тривиальна). Тогда для любого накрытия $g : Z \to X$ с линейно связным пространством Z существует морфизм P накрытия f в накрытие g.*

Следствие. *Все накрытия с данной базой X и с односвязными накрывающими изоморфны между собой.*

Доказательство. Зафиксиру ем базовые точки $q \in Y$ и $r \in Z$ так, чтобы $f(q) = g(r) \stackrel{\text{def}}{=} p$. Пусть $y \in Y$ — произвольная точка; соединим ее с q непрерывным путем γ. По лемме о накрывающей гомотопии существует единственный путь $\widetilde{\gamma}$ в пространстве Z такой, что $\widetilde{\gamma}(0) = r$, и $g \circ \widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Определим отображение $P : Y \to Z$ формулой $P(y) = \widetilde{\gamma}(1)$. Поскольку $\pi_1(Y) = 0$, любой другой путь γ с концами q и y гомотопен данному. При гомотопии путь $\widetilde{\gamma}$ также изменяется непрерывно, и то же самое относится к точке $\widetilde{\gamma}(1)$. Но поскольку $g(\widetilde{\gamma}(1)) = f(y)$ не изменяется, а множество $g^{-1}(f(y))$ дискретно, точка $\widetilde{\gamma}(1)$ остается на месте, и отображение P корректно определено. $\square$

Говорят, что пространство X локально односвязно, если каждая точка $x \in X$ обладает линейно связной окрестностью U такой, что $\pi_1(U) = 0$.

Предложение 1. *Всякое линейно связное локально односвязное пространство имеет односвязное накрытие.*

Доказательство. Пусть X — линейно связное пространство. Выберем произвольную точку $p \in X$ и обозначим Y множество непрерывных путей с началом в точке p, с точностью до гомотопии, сохраняющей концы пути (т.е. множество классов гомотопии непрерывных отображений $\gamma : [0,1] \to X$ таких, что $\gamma(0) = p$, с точностью до гомотопий F, при которых $F(0,\tau) = \gamma(0) = p$ и $F(1,\tau) = \gamma(1)$ при всех τ). Топология в пространстве Y вводится так: рассмотрим произвольную односвязную открытую окрестность $U \subset X$, выберем точку $x \in U$ и какой-нибудь путь γ, для которого $\gamma(0) = p$ и $\gamma(1) = x$. В силу односвязности для любых двух точек $a, b \in U$ существует единственный, с точностью до гомотопии, путь r_{ab}, связывающий эти точки и лежащий в U. Обозначим $V(U,\gamma)$ множество путей, связывающих p с различными точками $y \in U$ и гомотопных объединен ию путей γ и r_{xy}. Нетрудно проверить, что подмножества $V(U,\gamma) \subset Y$ задают в Y структуру топологического пространства.

Определим теперь отображение $f : Y \to X$, сопоставляющее пути γ его правый конец $\gamma(1)$ (в силу предположения $\gamma(1)$ не меняется при гомотопии). Нетрудно видеть, что это непрерывное отображение. Кроме того, $f^{-1}(U)$ есть объединение окрестностей $V(U,\delta)$ по всем классам гомотопии путей δ, соединяющих p и x; окрестности $V(U,\delta)$ для разных δ не пересекаются — следовательно, f это накрытие.

Пространство Y линейно связно (почему ?); докажем его односвязность. Обозначим $P \in Y$ класс гомотопии пути $e(t) \equiv p$, и пусть λ — петля в Y с началом и концом в P. Пусть $\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(t)(1) \in X$ (т.е. конечная точка пути $\lambda(t)$ в пространстве X); γ — петля в пространстве X с началом и концом в точке p. Согласно определению топологии в пространстве Y, из непрерывности следует, что при всяком $s \in [0,1]$ путь $\lambda(s)$ гомотопен отрезку петли γ, соответствующему $t \in [0,s]$. Поскольку $\lambda(1) = P$, отсюда следует, что петля γ стягиваема. Следовательно, образ мономорфизма $f_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ тривиален, откуда $\pi_1(Y) = 0$. □

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное локально односвязное пространство. Тогда для всякой подгруппы $G \subset \pi_1(X)$ существует единственное, с точностью до изоморфизма, накрытие $f : X_G \to X$ такое, что $f_*(\pi_1(X_G)) = G$.*

Доказательство. Конструкция пространства X_G аналогична конструкции односвязного накрытия в предложении 1. А именно, возьмем в качестве X_G множество непрерывных путей с началом в точке p, с точностью до гомотопии, сохраняющей концы пути, и до умножения на петли с началом и концом в этой точке, реализующие классы $a \in G$. Нетрудно проверить, что пространство X_G удовлетворяет требованиям теоремы.

Единственность: пусть теперь $f' : X'_G \to X$ — другое накрытие с тем же свойством. По свойству универсальности, существует морфизм накрытий $r : Y \to X'_G$. Напомним, что элементы пространства Y это пути в X с началом в точке p; поскольку $f'_*(\pi_1(X'_G)) = G$, то образы путей a и b при отображении r совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их конечные точки, и петля ab^{-1} реализует элемент подгруппы G. С другой стороны, само отображение r является накрытием (почему ?), и, в силу односвязности пространства Y получаем изоморфизм между X'_G и X_G. □

Таким образом, накрытия над X взаимно однозначно соответствуют подгруппам группы $\pi_1(X)$, и любое алгебраическое свойство подгруппы соответствует некоторому геометрическому свойству накрытия. Вот примеры:

Предложение 2. *Подгруппа $G \subset \pi_1(X)$ нормальна тогда и только тогда, когда для любого замкнутого пути γ в пространстве X_G любой путь, имеющий ту же проекцию, также замкнут.*

Доказательство. Пусть пути γ_1 и γ_2 имеют одну и ту же проекцию: $f_*(\gamma_1) = f_*(\gamma_2) = \gamma \in \pi_1(X)$. Поскольку γ_1 замкнут, петля γ реализует элемент подгруппы G. Пространство X_G линейно связно, и поэтому существует путь τ, соединяющий точки $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(0)$. Пусть $\lambda = f_*(\tau)$, тогда $f_*(\tau \cdot \gamma \cdot \tau^{-1}) = \lambda\gamma\lambda^{-1}$. Путь γ_2 замкнут тогда и только тогда, когда $\lambda\gamma\lambda^{-1} \in G$. □

Накрытия, обладающие свойством, указанным в этом предложении, называются нормальными.

Предложение 3. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное, с точностью до изоморфизма, n-листное накрытие над окружностью. Это накрытие нормально.*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$ имеет единственную подгруппу индекса n; эта подгруппа нормальна. □

Указанное накрытие можно реализовать как отображение $f : S^1 \to S^1$ единичной окр ужности в себя, умножающее полярный угол на n.