ЛЕКЦИЯ 4. ПОВЕРХНОСТИ И ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ.

Топологическое пространство Σ называется n-мерным многообразием с краем, если выполнены следующие требования: а) $\forall p, q \in \Sigma, p \neq q$ существуют открытые окрестности $U \ni p, V \ni q$ такие, что $U \cap V = \varnothing$; б) каждая точка $p \in \Sigma$ имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^n$ (в этом случае p называется внутренней точкой), либо замкнутому полупространству — множеству векторов в $\mathbb{R}^n$ с неотрицательной первой координатой (в этом случае p называется точкой края). Двумерное многообразие называется поверхностью.

Некоторые свойства многообразий (доказывать которые мы не будем). *Многообразие размерности n не может одновременно быть многообразием размерности m при $m \neq n$. Внутренняя точка многообразия с краем не может быть точкой края, и наоборот. Край n-мерного многообразия является $(n-1)$-мерным многообразием без края.*

Пример 1 (одномерных многообразий). Многообразия без края: прямая, окружность, а также несвязное объединение этих пространств в любом количестве. Многообразия с краем: отрезок, полуинтервал.

Пример 2 (двумерных многообразий). Многообразия без края: плоскость, двумерная сфера, двумерный тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ и бесконечный цилиндр $C = S^1 \times \mathbb{R}$, а также любое из этих пространств, из которого удалено произвольное конечное множество точек ("проколы"). Многообразия с краем: замкнутый круг, цилиндр $[0,1] \times S^1$, а также любое из приведенных выше многообразий, из которого удалены открытые окрестности произвольного конечного набора точек ("дырки").

Пример 3. Объединение двух пересекающихся прямых не является многообразием. Действительно, если из малой окрестности точки A пересечения прямых выкинуть эту точку, то получаем пространство, состоящее из 4 компонент линейной связности. Выкидывая точку из n-мерного шара, мы получим либо 2 (при $n = 1$), либо 1 (при $n \geq 2$) компоненту. Поэтому окрестность точки A не гомеоморфна шару.

Пример 4 (лента Мебиуса). Это пространство $\mathcal{M}$, получающееся из квадрата $[0,1]^2$ отождествлением точек вида $(0,t)$ и $(1, 1-t)$ при всех $0 \leq t \leq 1$ (продумайте самостоятельно, как ввести в таком множестве топологию). Лента Мебиуса — двумерное многообразие с краем. Точки (x,y) с $0 < y < 1$ — внутренние. Если $0 < x < 1$, то в качестве окрестности, гомеоморфной открытому кругу, можно взять множество $(0,1)^2 \subset \mathcal{M}$. Если $x = 0$ или $x = 1$, то в качестве такой окрестности берем объединение $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \times [0, \varepsilon) \cup (1-y-\varepsilon, 1-y+\varepsilon) \times (1-\varepsilon, 1]$ (при достаточно малом $\varepsilon > 0$), в котором надлежащие точки отождествляются. Аналогично показывается, что точки с $y = 0$ и $y = 1$ образуют край ленты Мебиуса, который гомеоморфен окружности.

Пример 5 (сфера с g ручками, или ориентируемая поверхность рода g). Это пространство Σ_g, полученное из правильного $4g$-угольника $A_1 \dots A_{4g}$ отождествлением всех сторон A_iA_{i+1} и $A_{i+2}A_{i+3}$ "с сохранением ориентации": точка, делящая отрезок A_iA_{i+1} в отношении $t:(1-t)$, считая от вершины A_i, переходит в точку, делящую отрезок $A_{i+2}A_{i+3}$ в том же отношении, считая от A_{i+3}. Нетрудно видеть, что Σ_g это двумерное многообразие без края. Происхождение названий мы объясним позднее.

Пример 6 (сфера с g листами Мебиуса, или неориентируемая поверхность рода $g-1$). Это пространство Σ'_{g-1}, полученное той же конструкцией, что Σ_g (из $4g$-угольника ! обратите внимание на обозначения), только отождествление сторон производится "со сменой ориентации".

Двумерный тор с дыркой (это двумерное многообразие с краем окружность) называется ручкой.

Предложение 1. *Поверхность Σ_g гомеоморфно двумерной сфере с g дырками, к каждой из которых приклеена по границе ручка. Поверхность Σ'_{g-1} гомеоморфна двумерной сфере с g дырками, к каждой из которых приклеена по границе лента Мебиуса.*

Доказательство. Поверхность Σ_1 это двумерный тор, который по определению получается из ручки приклеиванием к ее краю круга, т.е. сферы с одной дыркой. Поверхность Σ'_0 (называемая проективной плоскостью) представляет собой круг, у которого отождествляются диаметрально противоположные точки границы. Вырежем в центре круга круглую дырку, отметим на ней две диаметрально противоположные точки A и B, и соединим их с двумя диаметрально противоположными точками A' и B' на внешней окружности. Теперь разрежем картинку по хордами AA' и BB', и склеим две дуги $A'B'$ внешней окружности (так, чтобы отождествленные точки склеились). Нетрудно видеть, что получится лента Мебиуса — то есть, Σ'_0 получается приклеиванием к этой ленте круга.

Для произвольного g проведем в $4g$-угольнике хорду A_1A_4. Она разбивает $4g$-угольник на $(4g-3)$-угольник и пятиугольник. Нетрудно видеть, что при отождествлении сторон $(4g-3)$-угольник превращается в Σ_{g-1} (соответственно, Σ'_{g-2}) с дыркой, а пятиугольник — в ручку (соответственно, поверхность Σ'_0 с дыркой, т.е. ленту Мебиуса). Сама хорда становится гомеоморфна окружности. Тем самым, утверждение доказано индукцией по g. $\square$

Поверхности Σ_g и Σ'_g линейно связны и не имеют края. Кроме того, как топологические пространства они компактны (это свойство пространства X означает, что если $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, где все U_α — открытые окрестности, то существует такое *конечное* множество индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in A$ таких, что $X = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_N}$). Имеет место

Теорема 1 (о классификации компактных поверхностей). *Всякое компактное линейно связное двумерное многообразие без края гомеоморфно либо двумерной сфере, либо одной и только одной поверхности Σ_g или Σ'_g.*

Мы не будем доказывать собственно классификационную теорему, т.е. утверждение, что кроме Σ_g и Σ'_g, других поверхностей не существует. Позднее мы докажем, что указанные поверхности попарно не гомеоморфны (это утверждение "и только одной" из теоремы).

Пусть Σ — поверхность без края (не обязательно компактная), $p \in \Sigma$. По определению, существует окрестность $U \subset \Sigma$, $p \in U$, гомеоморфная кругу. Тогда пространство $U \setminus \{p\}$ гомотопически эквивалентно окружности и, следовательно, $\pi_1(U \setminus \{p\}) = \mathbb{Z}$. Рассмотрим пространство X, элементами которого являются пары (p, γ), где $p \in \Sigma$, а γ — петля, не проходящая через точку p, для которой существует окрестность U точки p, гомеоморфная кругу и такая, что класс гомотопии петли γ порождает группу $\pi_1(U \setminus \{p\})$. При этом мы отождествим точки (p, γ_1) и (p, γ_2), если кривые γ_1 и γ_2 гомотопны друг другу в дополнении к точке p.

В пространстве X введем топологию: для каждой точки $(p, \gamma) \in X$ найдется окрестность $V \subset \Sigma$ точки p такая, что для всех $q \in V$ кривая γ порождает группу $\pi_1(U \setminus \{q\})$. Совокупность точек (q, γ), где $q \in V$, объявим открытой окрестностью в X и обозначим $A_{V,\gamma}$.

Теорема 2. *Естественное отображение $f(p, \gamma) = p$ определяет двулистное накрытие $X \to \Sigma$. Пространство X является поверхностью без края.*

Доказательство. Окрестность $A_{U,\gamma}$ гомеоморфна U, откуда следует, что X — поверхность без края. Группа $\mathbb{Z}$ имеет две образующих: 1 и -1. Поэтому при фиксированных p и U существуют ровно два класса гомотопии петель, порождающих группу $\pi_1(U \setminus \{p\})$. Тем самым, прообраз окрестности $U \ni p$, гомеоморфной кругу, состоит из двух окрестностей вида $A_{U,\gamma}$. Таким образом, проекция $X \to \Sigma$ — двулистное накрытие. $\square$

Поверхность Σ называется ориентируемой, если накрытие $f : X \to \Sigma$ тривиально, и неориентируемой в противоположном случае.