ЛЕКЦИЯ 5. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ВЛОЖЕННЫХ ГРАФАХ.

Пусть Σ — поверхность, $\lambda : X \to \Sigma$ — ориентирующее накрытие. Каждый элемент $s \in \pi_1(\Sigma, p)$ порождает преобразование $A_s : f^{-1}(p) \to f^{-1}(p)$ прообраза отмеченной точки p в себя. Множество $f^{-1}(p) \subset X$ состоит из двух точек, так что преобразование A_s может либо быть тождественным, либо менять эти точки местами. В первом случае говорят, что петля s сохраняет ориентацию, в втором случае — что меняет.

Пример 1. Петля $\gamma(t) = (t, 1/2)$ на ленте Мебиуса меняет ориентацию. Действительно, петля ϱ, обходящая точку $(1/2, 1/2)$ против часовой стрелки, переходит при переносе вдоль γ в петлю ϱ', состоящую из полуокружности с центром $(0, 1/2)$ против часовой стрелки и полуокружности с центром $(1, 1/2)$ по часовой стрелке. Кривая ϱ', в свою очередь, переходит в ϱ^{-1}.

Ориентирующим накрытием над лентой Мебиуса является цилиндр $[0, 1] \times S^1$. Действительно, если φ — координата (угол) на окружности, а t — на отрезке, то отображение проекции такое: $p(\varphi, t) = (2\varphi, t)$, если $0 \le \varphi \le \pi$, и $p(\varphi, t) = (2\varphi, 1 - t)$, если $\pi \le \varphi \le 2\pi$. При этом над краем ленты Мебиуса накрытие тривиально, а над "осевой" окружностью — нетривиально.

Пусть $p : Y \to X$ — накрытие. Непрерывное отображение $s : X \to Y$ называется сечением накрытия p, если $p \circ s = \mathrm{id}_X$.

Лемма. *Пусть $p : Y \to X$ — накрытие, причем пространства X и Y линейно связны. Накрытие p имеет сечение тогда и только тогда, когда оно тривиально (однолистно).*

Доказательство. Однолистное накрытие — гомеоморфизм и, следовательно, имеет сечение — обратный гомеоморфизм. Пусть теперь накрытие p имеет сечение s. Из равенства $p \circ s = \mathrm{id}_X$ следует, что $p_* \circ s_* = (p \circ s)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X)}$. Следовательно, образ мономорфизма $p_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ совпадает со всей группой $\pi_1(X)$, откуда следует, что накрытие однолистно. $\square$

Следствие. *Несвязное накрытие над связной базой имеет сечение тогда и только тогда, когда тривиально его ограничение на одну из компонент связности накрывающего пространства.*

Если поверхность Σ неориентируема, то поверхность X линейно связна. Отсюда следует, что ориентирующее накрытие имеет сечение тогда и только тогда, когда поверхность Σ ориентируема. Сечение называется ориентацией поверхности Σ.

Теорема 1. *При всяком g поверхность Σ_g ориентируема, а поверхность Σ'_g — нет. Накрывающее пространство X ориентирующего накрытия $X \to \Sigma'_g$ гомеоморфно двумерной сфере при $g = 0$ и поверхности Σ_g при $g \ge 1$.*

Доказательство. Для доказательства ориентируемости поверхности Σ_g построим на ней ориентацию $s : \Sigma_g \to X$ (X — ориентирующее накрытие). Для этого нужно в каждой точке $p \in \Sigma_g$ зафиксировать кривую γ_p, порождающую группу $\pi_1(U \setminus \{p\})$, где U — малая окрестность p. Если p — внутренняя точка $4g$-угольника, то возьмем в качестве γ_p окружность, лежащую целиком внутри него и обходящую p против часовой стрелки. Если p лежит на стороне (и тем самым представляется парой точек p_1, p_2), то в качестве γ_p возьмем объединение полуокружностей с центрами в p_1, p_2, также проходимых против часовой стрелки. В случае, когда p — вершина $4g$-угольника (и представляется тем самым $4g$ точками), то возьмем соответствующее объединение дуг.

Построим явно ориентирующее накрытие над Σ'_g. Двумерная сфера ориентируема, откуда следует, что ориентируема и сфера с $g+1$ дырками. Согласно примеру 1, ориентирующее накрытие над лентой Мебиуса гомеоморфно цилиндру $[0,1] \times S^1$. Аналогично примеру 1 доказывается, что осевая линия каждой из лент Мебиуса — петля, меняющая ориентацию, откуда следует, что Σ'_g неориентируема.

Таким образом, ориентирующее накрытие над Σ'_g представляет собой две сферы с $g+1$ дырками каждая, дырки которых попарно заклеены цилиндрами, причем цилиндр соединяет дырки, лежащие на разных сферах. Нетрудно видеть, что такая поверхность гомеоморфна Σ_g. $\square$

Конечным графом называется пара $G = (V, E)$, где V — конечное множество (его элементы называются вершинами графа), а E — конечное подмножество $V \times V$ (его элементы называются ребрами); обозначения $v = \#V$, $e = \#E$. С графом G можно связать следующее топологическое пространство: наделим E и V дискретной топологией и рассмотрим несвязное объединение $\widetilde{G} = V \sqcap E \times [0,1]$. После этого отождествим в пространстве $\widetilde{G}$ каждую точку $p \in V$ со всеми точками вида $((p,q),0) \in E \times [0,1]$ и со всеми точками вида $((q,p),1) \in E \times [0,1]$. Полученное пространство тоже будем обозначать G.

Граф G называется вложенным в двумерную поверхность Σ (с краем или без края), если в Σ задано подмножество, гомеоморфное G, и такое, что дополнение к нему гомеоморфно несвязному объединению конечного количества кругов (связные компоненты дополнения называются гранями, множество граней обозначается F, и $f = \#F$).

Примеры вложенных графов:

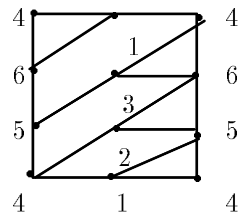
Пример 2. Граф G, состоящий из 1 вершины и 1 ребра-петли, вкладывается в сферу: ребро — экватор, вершина — произвольная точка на экваторе.

Пример 3. Граф G, состоящий из 1 вершины и 2 ребер-петель, вкладывается в сферу, а также в тор; в последнем случае ребра — параллель и меридиан тора, вершина — точка их пересечения.

Пример 4. Σ — круг, а G состоит из n точек на границе и ребер, образующих некоторую триангуляцию n-угольника.

Пример 5. Θ-граф, состоящий из двух вершин и трех соединяющих их ребер, вкладывается в ленту Мебиуса.

Пример 6. Граф, состоящий из 6 вершин $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ и 9 ребер вида A_iB_j, $i, j = 1, 2, 3$, вкладывается в тор:



Можно показать (мы не будем этого делать), что в поверхность Σ можно вложить конечный граф тогда и только тогда, когда она компактна.

Теорема 2. *Пусть G — связный граф, вложенный в поверхность Σ. Тогда величина $\chi(\Sigma) = v - e + f$ не зависит от выбора графа G и его вложения в поверхность Σ, а зависит только от самой поверхности.*

Доказательство теоремы будет дано в следующей лекции.