ЛЕКЦИЯ 6. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА ПОВЕРХНОСТИ

Теорема 1 (Эйлера). *Пусть G — связный граф, вложенный в поверхность Σ. Тогда величина $\chi(\Sigma) = v - e + f$ не зависит от выбора графа G и его вложения в поверхность Σ, а зависит только от самой поверхности.*

Число $\chi(\Sigma)$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности Σ. Для доказательства теоремы нам потребуются несколько технических фактов, доказывать которые мы не будем:

Лемма 1 (о неразбиении). *Пусть множество $I \subset S^2$ гомеоморфно отрезку. Тогда дополнение $S^2 \setminus I$ гомеоморфно кругу.*

Следствие 1.1. *Пусть Ω — круг, $I \subset \Omega$ гомеоморфно отрезку, и хотя бы одмн из концов множества I лежит внутри круга. Тогда дополнение $\Omega \setminus I$ линейно связно; если на границе лежит ровно одна вершина, то $\Omega \setminus I$ гомеоморфно кругу.*

Следствие 1.2. *Открытое множество в $\mathbb{R}^2$ не может быть гомеоморфно замкнутой полуплоскости. В частности, внутренняя точка двумерного многообразия не может быть одновременно точкой края.*

(последний факт, конечно, верен для многообразий произвольной размерности, но мы его не доказываем).

Доказательство. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ открыто и гомеоморфно замкнутой полуплоскости Π. Пусть $a \in \partial\Pi$, и $b \in U$ — образ a при гомеоморфизме. Пусть $\Omega \ni b$ — круг, переходящий при гомеоморфизме в множество $\Psi \ni a$. Существует кривая, гомеоморфная отрезку и делящая Ψ на две части, а в Ω ее не существует согласно лемме. □

Следствие 1.3. *Если граф вложен в поверхность с краем, то все точки края принадлежат графу.*

Лемма 2 (Жордана). *Пусть множество $I \subset S^2$ гомеоморфно окружности. Тогда дополнение $S^2 \setminus I$ состоит из двух компонент линейной связности, каждая из которых гомеоморфна открытому кругу, а ее объединение с I — замкнутому кругу.*

Следствие 2.1. *Пусть Ω — круг, $I \subset \Omega$ гомеоморфно отрезку, и оба конца множества I лежат на границе круга. Тогда дополнение $\Omega \setminus I$ состоит из двух компонент связности, F_1 и F_2. Каждое из множеств F_1 и F_2 гомеоморфно замкнутой полуплоскости, а объединения $F_1 \cup I$ и $F_2 \cup I$ — замкнутым кругам.*

Лемма 3 (о шевелении). *Пусть Ω — круг, множество $T \subset \Omega$ конечно, а $S \subset \Omega$ и $\gamma \subset \Omega$ гомеоморфны отрезкам. Тогда произвольно малым шевелением можно перевести γ в множество $\widetilde{\gamma}$, не пересекающее множество T и пересекающее множество S в конечном числе точек.*

Доказательство теоремы 1. Мы проведем его в несколько этапов. *Циклом* в графе называется замкнутый путь, проходящий по его ребрам, причем ни по какому ребру не проходящий дважды. Граф называется *деревом*, если он связный и не имеет циклов.

Этап 1: $\Sigma = S^2$, а G — дерево. Нетрудно видеть (индукция по числу вершин), что для дерева $v = e + 1$. Докажем индукцией по e, что если $G \subset S^2$ гомеоморфно дереву, то дополнение $S^2 \setminus G$ гомеоморфно кругу, и в частности связно.

При $e = 0$ утверждение очевидно; пусть $e > 0$. Вершина дерева называется висячей, если из нее выходит только одно ребро; нетрудно видеть, что во всяком дереве с $e > 0$ имеется по крайней мере 2 висячие вершины. Возьмем одну из них и сотрем, вместе с выходящим из нее ребром; при этом оставшийся граф G', очевидно, является деревом. По предположению индукции, $S^2 \setminus G'$ гомеоморфно кругу. Стертое ребро гомеоморфно отрезку, и его конец лежит на границе $S^2 \setminus G'$. Согласно следствию 1.1, $S^2 \setminus G'$ также гомеоморфно кругу. Следовательно, $f = 1$, и $v - e + f = 2$ не зависит от графа G и его вложения.

Этап 2: $\Sigma = S^2$, G — произвольный граф; докажем теорему индукцией по e. Если в графе имеется висячая вершина, то сотрем ее вместе с входящим в нее ребром. Рассуждая как этапе 1, покажем, что полученный граф G' — вложенный, причем $v' = v - 1$, $e = e' - 1$ и $f' = f$. По предположению индукции $v' - e' + f' = 2$, откуда $v - e + f = 2$.

Пусть в графе G нет висячих вершин. Тогда он содержит цикл; сотрем произвольное ребро E_i, входящее в этот цикл. Нетрудно видеть, что полученный граф G' — связный. Согласно следствию 2.1, ребро E_i лежит на границе ровно двух граней. Отсюда следует, что граф G' вложен, и $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$. По предположению индукции, $v' - e' + f' = 2$, откуда $v - e + f = 2$.

Таким образом, теорема доказана в случае $\Sigma = S^2$, причем $\chi(S^2) = 2$.

Этап 3: Σ — круг, в который вложен граф G. Согласно следствию 1.3, граница круга принадлежит графу. Приклеим к Σ по границе еще один круг; получится сфера, причем граф G вложен в эту сферу. При этой операции число f увеличивается на единицу, а v и e не изменяются. Значит, для исходного графа $v - e + f = 1$, и теорема доказана для круга, причем его эйлерова характеристика равна 1.

Этап 4: пусть Σ — произвольная поверхность. Рассмотрим на ней два вложенных графа, G_1 и G_2, и докажем, что $v_1 - e_1 + f_1 = v_2 - e_2 + f_2$. Согласно лемме о шевелении, можно считать, что ребра графов пересекаются в конечном числе точек, причем ребра одного графа не проходят через вершины другого (в частности, вершины графов попарно различны). Добавим к графам G_1 и G_2 новые вершины в точках пересечения их ребер; заметим, что числа $v_1 - e_1 + f_1$ и $v_2 - e_2 + f_2$ при этом не изменятся. Рассмотрим граф G, полученный объединением всех вершин и ребер графов G_1 и G_2. Из следствия 2.1 вытекает, что граф G вложенный; пусть в нем v вершин, e ребер и f граней.

Пусть F_i — грань графа G_1, а $\overline{F}_i$ — ее замыкание. Тогда на $\overline{F}_i$ возникает вложенный граф Γ_i, составленный из вершин и ребер графа G, попавших в $\overline{F}_i$. Пусть на границе ∂F_iнаходится p вершин (и, соответственно, p ребер) графа Γ_i, а внутри — v_i вершин, e_i ребер и f_i граней. Согласно результату этапа 3, $(p + v_i) - (p + e_i) + f_i = 1$, т.е. $f_i - 1 = e_i - v_i$. Удалим из G все вершины и ребра, лежащие внутри граней; тогда число f уменьшится на $f_i - 1$, число v

на v_i, а число e на e_i, а число $v-e+f$ уменьшится на $v_i - e_i + (f_i - 1) = 0$, т.е. не изменится. Таким образом, мы "очистим" все грани графа G_1, и получим, что $v-e+f = v_1 - e_1 + f_1$. Но то же самое рассуждение применимо и к графу G_2 — следовательно, $v_2 - e_2 + f_2 = v - e + f = v_1 - e_1 + f_1$. □

Теорема 2. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — поверхности с краем, а поверхность Σ получена их склеиванием по какой-нибудь компоненте связности края. Тогда $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2)$.*

Доказательство. Рассмотрим на поверхности Σ граф G, полученный объединением графов G_1 и G_2, вложенных в Σ_1 и Σ_2; при этом без ограничения общности можно считать, что вершины и ребра графов G_1 и G_2 на "склеенной" границе — общие.

Пусть на общей границе лежит p вершин графа G и, следовательно, p ребер. Тогда $\chi(\Sigma) = v - e + f = v_1 + v_2 - p - e_1 - e_2 + p + f_1 + f_2 = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2)$. □

Следствие 1. *Пусть поверхность Σ получена из поверхности Σ' вырезанием дырки. Тогда $\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma') - 1$. В частности, эйлерова характеристика сферы с n дырками равна $2 - n$.*

Доказательство. Дырка представляет собой круг, эйлерова характеристика которого равна 1. □

Следствие 2. *Эйлерова характеристика сферы с n дырками и g ручками, равна $2 - 2g - n$. Эйлерова характеристика сферы с n дырками и g лентами Мебиуса равна $2 - n - g$.*

Доказательство. Как следует из примера 3 предыдущей лекции, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$. Из следствия 1 получаем, что эйлерова характеристика ручки (тора с дыркой) равна -1. Эйлерова характеристика ленты Мебиуса равна 0, согласно примеру 5 предыдущей лекции. □

Теорема 3. *Пусть $p : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ — n-листное накрытие. Тогда $\chi(\Sigma_1) = n\chi(\Sigma_2)$.*

Доказательство. Вложим в поверхность Σ_2 граф G с v вершинами и e ребрами, и рассмотрим его прообраз $G' \subset \Sigma_1$ при отображении p. Очевидно, G' — граф с nv вершинами. Ограничение отображения p на прообраз произвольного ребра α (без концов) представляет собою n-листное накрытие над α. Поскольку $\pi_1(\alpha) = 0$ (α гомеоморфно интервалу, т.е. стягиваемо), это накрытие тривиально. Поэтому прообраз каждого ребра состоит из n различных ребер, и общее число ребер графа G' равно ne. Аналогично, прообраз каждой грани, на которые G разбивает Σ_2, гомеоморфен несвязному объединению n кругов. Граф G' вложен в поверхность Σ_1, поскольку все грани гомеоморфны кругам. Граница круга линейно связна, откуда следует, что и граф G' связен. Число граней равно nf, где f — число граней на поверхности Σ_2. Отсюда $\chi(\Sigma_1) = nv - ne + nf = n\chi(\Sigma_2)$. □

Пример. Граф примера 6 предыдущей лекции невозможно вложить в сферу. Действительно, здесь $v = 6$, $e = 9$, откуда, если вложение возможно, $f = 5$. С другой стороны, граница каждой грани содержит не менее 4 ребер, а каждое ребро лежит на границе не более 2 граней. Отсюда следует неравенство $e \geq 2f$ — противоречие.