ЛЕКЦИЯ 8. ТОЧНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАССЛОЕНИЯ

Непрерывное отображение $g : X \to E$ называется поднятием непрерывного отображения $f : X \to B$ (X — произвольное топологическое пространство), если $p \circ g = f$. Поднятие тождественного отображения $\mathrm{Id} : B \to B$ называется сечением расслоения.

Теорема 1 (о накрывающей гомотопии). *Пусть $p : E \to B$ — расслоение со слоем F, и задана гомотопия $f : K_n \times [0,1] \to B$. Пусть заданы поднятие $\widetilde{g}$ гомотопии $f(x,t)$ при $x \in \partial K_n$, и поднятие g_0 отображения $f|_{t=0} : K_n \to B$, причем выполнено условие согласования $g_0(x) = \widetilde{g}(x,0)$ при $x \in \partial K_n$. Тогда существует поднятие g гомотопии f такое, что $g(x,t) = \widetilde{g}(x,t)$ при $x \in \partial K_n$ и $g(x,0) = g_0(x)$ при всех $x \in K_n$.*

В отличие от случая накрытий единственность поднятия g не утверждается. Верно, однако,

Следствие-уточнение. *Любые два поднятия $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ одной и той же гомотопии f гомотопны друг другу.*

Это следует из той же теоремы о накрывающей гомотопии, примененной к кубам на единицу большей размерности.

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии будет дано в следующей лекции. Для доказательства нам потребуется следующая важная лемма:

Лемма (Фельдбау). *Всякое расслоение $p : E \to K_n$ над кубом K_n тривиально.*

Доказательство. Разобьем K_n на два подкуба I_1 и I_2, выделенных условиями $x_n \le 1/2$ и $x_n \ge 1/2$. Обозначим $E_1 = p^{-1}(I_1)$, $E_2 = p^{-1}(I_2)$. Предположим сначала, что расслоения $p : E_1 \to I_1$ и $p : E_2 \to I_2$ тривиальны, и пусть $\varphi_1 = (\varrho_1, p) : E_1 \to F \times K_n$ и $\varphi_2 = (\varrho_2, p) : E_2 \to F \times K_n$ — соответствующие тривиализующие гомеоморфизмы. При этом можно считать, что слои над точками пересечения $I_1 \cap I_2$ переводятся отображениями φ_1 и φ_2 в произведения слоя F на грань $x_n = 0$ куба K_n. Таким образом, для произвольного набора $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in K_n$ определено отображение $g_x : \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : F \to F$. Пусть теперь $e \in E$ произвольно, и $p(e) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in K_n$. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и определим точку $\varrho(e) = \begin{cases} \varrho_1(e), & \text{если } x_n \le 1/2 \\ g_{x'} \circ \varrho_1(e), & \text{если } x_n \le 1/2 \end{cases}$. Нетрудно видеть, что $\varrho(e) = (\varrho(e), p(e))$ — тривиализация расслоения E.

Пусть теперь расслоение $p : E \to K_n$ произвольно. Разделим отрезок $[0,1]$ на N частей, где N настолько велико, что ограничение расслоения на каждый из полученных маленьких кубов I_s в $K_n = [0,1]^n$ тривиально. Кубы I_s нумеруются наборами $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i = 1, \dots, N$. Согласно первой части доказательства, ограничение расслоения на произвольный “столбик” $I_{(s_1,\dots,s_{n-1})} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=1}^N I_{(s_1,\dots,s_{n-1},s)}$ тривиально. Применяя лемму еще раз, получим, что тривиально ограничение на “двумерный столбик” $I_{(s_1,\dots,s_{n-2})} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s=1}^N I_{(s_1,\dots,s_{n-2},s)}$, и т.д. □

Последовательность групп и гомоморфизмов $\dots \xrightarrow{d_k} G_k \xrightarrow{d_{k+1}} G_{k+1} \xrightarrow{d_{k+2}} \dots$ называется *точной*, если для всякого k образ гомоморфизма d_k совпадает с ядром гомоморфизма d_{k+1}. В частности, из точности следует, что гомоморфизм $d_{k+1} \circ d_k$ переводит всю группу G_{k-1} в единицу группы G_{k+1}.

Пример 1. Точность последовательности $1 \to A \xrightarrow{d} B \to 1$ означает, что d — изоморфизм групп A и B. Здесь и в дальнейшем 1 означает тривиальную группу.

Пример 2. Точность последовательности (так называемой “короткой”) $1 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} C \to 1$ означает, что ι — вложение (мономорфизм), π — проекция (эпиморфизм), а группа B содержит подгруппу $\iota(A)$, изоморфную A и такую, что фактор по ней изоморфен C. При этом, разумеется, не обязательно, чтобы B была изоморфна $A \times C$; если это равенство имеет место, то говорят, что точная последовательность *расщепляется* в члене B.

Пусть $p : E \to B$ — произвольное расслоение со слоем F. Отметим точку $e \in E$ и $b = p(e) \in B$; тогда для каждого n возникает гомоморфизм $p_* : \pi_n(E,e) \to \pi_n(B,b)$. Обозначим $\iota : F \to E$ отображение, отождествляющее F со слоем $p^{-1}(b)$ над отмеченной точкой; отметим в F точку $a = \iota^{-1}(e)$ и получим гомоморфизм $\iota_* : \pi_n(F,a) \to \pi_n(E,e)$.

Рассмотрим “тавтологическую”гомотопию $u : K_{n-1} \times [0,1] \to K^n$, и пусть $\gamma : K_n \to B$ — произвольный n-сфероид с отмеченной точкой b. Композиция $\tau = \gamma \circ u$ определяет гомотопию $(n-1)$-сфероидов $\tau_t : K_{n-1} \to$

B, а которой сфероиды τ_0 и τ_1 — тождественные. По теореме о накрывающей гомотопии эту гомотопию можно поднять до гомотопии $\varphi_t : K_{n-1} \to E$, в которой сфероид φ_0 — тождественный: $\varphi_0(K_{n-1}) = e$. Сфероид φ_1 не обязан быть тождественным, но должен накрывать тождественный сфероид τ_1 — иными словами, $\varphi_1(K_{n-1}) \subset p^{-1}(b)$. Тем самым определен $(n-1)$-сфероид $\delta = \iota^{-1} \circ \varphi_1 : K_{n-1} \to F$. Согласно следствию теоремы о накрывающей гомотопии, δ однозначно, с точностью до гомотопии, определяется классом гомотопии сфероида γ. Нетрудно проверить также, что соответствие классов гомотопии $[\gamma] \mapsto [\delta]$ является гомоморфизмом групп $\partial : \pi_n(B, b) \to \pi_{n-1}(F, a)$.

Теорема 2. *Последовательность групп и гомоморфизмов* $\dots \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, a) \xrightarrow{\iota_*} \pi_n(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, a) \xrightarrow{\iota_*} \dots$ *является точной.*

Доказательство. В силу теоремы о накрывающей гомотопии мы можем игнорировать разницу между сфероидами и их классами гомотопии. Мы также не будет указывать отмеченные точки.

1. Проверка точности в члене $\pi_n(E)$. Ядро гомоморфизма $p_* : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ состоит из сфероидов, проектирующихся в отмеченную точку. Образ гомоморфизма $\iota_* : \pi_n(F) \to \pi_n(E)$ — из сфероидов, целиком лежащих в слое над отмеченной точкой. Совпадение очевидно.

2. Проверка точности в члене $\pi_n(B)$. Образ гомоморфизма $p_* : \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ состоит из сфероидов в B, которые можно поднять до сфероидов в E. Конструкция отображения ∂ показывает, что именно из таких сфероидов состоит его ядро.

3. Проверка точности в члене $\pi_{n-1}(F)$. Пусть $\gamma = \partial\varphi$ — сфероид, принадлежащий образу гомоморфизма $\partial : \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F)$. По построению он гомотопен, как сфероид в E, тождественному сфероиду — иными словами, принадлежит ядру гомоморфизма $\iota_* : \pi_{n-1}(F) \to \pi_{n-1}(E)$. Обратно, сфероид $\gamma \in \operatorname{Ker} \iota_*$, гомотопен тождественному; пусть $g : K_n \to E$ — соответствующая гомотопия. Тогда, по построению, $\gamma = \partial(p \circ g)$, т.е. принадлежит образу гомоморфизма ∂. $\square$

Замечание. Символом $\pi_0(X, b)$ часто обозначают множество компонент линейной связности топологического пространства X с отмеченной точкой b. Это множество не является группой, но в нем есть выделенный элемент ("единица") — компонента, содержащая отмеченную точку. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(b) = u$, порождает отображение $f_* : \pi_0(X, b) \to \pi_0(Y, u)$; можно говорить о ядре и образе этого отображения. Несложная проверка показывает, что множества π_0 можно включить в точную гомотопическую последовательность расслоения, так что ее последние члены выглядят так: $\pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, a) \xrightarrow{\iota_*} \pi_0(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b)$. При этом последние стрелки не являются гомоморфизмами, но последовательность остается точной.

Пример 3. Расслоение $p : E \to B$ — накрытие; слой F дискретен. Тогда $\pi_n(F) = 0$ при $n \geq 1$, и $\pi_0(F)$ — множество точек слоя. Участок последовательности с $n \geq 2$ выглядит как $0 \to \pi_n(E) \to \pi_n(E) \to 0$, откуда следует, что $\pi_n(E)$ и $\pi_n(B)$ изоморфны. При $n = 1$ получаем: $0 \to \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F)$. Это уже известное нам утверждение: p_* — мономорфизм фундаментальных групп, и индекс подгруппы $p_*\pi_1(E)$ в $\pi_1(B)$ равен числу листов накрытия.

Пример 4. Расслоение Хопфа: $E = S^3$, $B = S^2$, $F = S^1$. Здесь $\pi_k(F) = \mathbb{Z}$ при $k = 1$ и тривиально при $k > 1$. Нетрудно видеть (мы докажем это в следующей лекции), что $\pi_m(S^n) = 0$ при $m < n$. Отсюда получаем, что имеется точная последовательность $\pi_2(S^3) \to \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^3)$, т.е. $0 \to \pi_2(S^2) \to \mathbb{Z} \to 0$, откуда $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Это первый пример пространства с нетривиальной группой π_2. Образующей группы $\pi_2(S^2)$ служит прообраз образующей группы $\pi_1(S^1)$ при отображении ∂. Нетрудно видеть, что это класс гомотопии тождественного сфероида.