ЛЕКЦИЯ 9. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СФЕР

Доказательство теоремы о накрывающей гомотопии. Докажем теорему сперва в случае, когда расслоение тривиально. В этом случае поднятие g имеет вид $g(x,t) = (f(x,t), h(x,t))$, где $h : K_n \times [0,1] \to F$ — непрерывное отображение, которое надо построить. При этом заданы отображения $h_0 : K_n \to F$ и $\widetilde{h} : \partial K_n \times [0,1] \to F$.

Зафиксируем $t \in [0,1]$ и разобьем куб K_n на внутренний куб Q с ребром $1 - t/2$ и "рамку". Рамка гомеоморфна $\partial K_n \times [0,t]$, так что на ней можно положить $g(x,t) = \widetilde{g}(x,t)$. Куб Q гомеоморфен K_n, так что на нем положим $g(x,t) = g_0(x)$. Условие согласования обеспечивает непрерывность на общей границе Q и рамки.

Общий случай сводится к этому с помощью леммы Фельдбау. Рассмотрим подмножество $E' \subset K_{n+1} \times E = K_n \times [0,1] \times E$, заданное условием $E' = \{(x,t,e) \in K_n \times [0,1] \times E' \mid p(e) = f(x,t)$. Проекция $E' \to K_n \times [0,1] = K_{n+1}$ определяет расслоение p' над K_{n+1}, которое тривиально по лемме Фельдбау. Осталось применить теорему о накрывающей гомотопии к этому расслоению, тождественной гомотопии $\varrho : K_n \times [0,1] \to K_{n+1}$ и отображениям $G_0 : K_n \to E'$ и $\widetilde{G} : \partial K_n \times [0,1] \to E'$, заданным формулами $G_0(x) = (g_0(x), x, 0)$ и $\widetilde{G}(x,t) = (\widetilde{g}(x,t), x, t)$. □

Рассмотрим сферу S^n, вложенную в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ в качестве единичной сферы с центром в начале координат, и пусть $a_0, \ldots, a_k \in S^n$. (k-мерным сферическим) Симплексом с вершинами $a_0, \ldots, a_k$ называется пересечение S^n с конусом в $\mathbb{R}^{n+1}$, натянутым на радиус-векторы $a_0, \ldots, a_k$. Отображение $s : \Delta_k \to \Delta_l$ между двумя симплексами называется аффинным, если оно переводит каждый симплекс $\Delta \subset \Delta^k$ в симплекс $\Delta' \subset \Delta^l$ (возможно, меньшей размерности); отображение $f : S^m \to S^n$ называется кусочно-аффинным, если существует разбиение S^m на m-мерные симплексы, на каждом из которых отображение аффинно.

Лемма 1. *Всякое непрерывное отображение $f : S^m \to S^n$ гомотопно кусочно-аффинному отображению, причем гомотопия может быть сделана произвольно малым шевелением.*

Доказательство. Разобьем S^m на симплексы настолько малые, чтобы образы двух точек одного и того же симплекса не были взаимно противоположны. Пусть $a_0, \ldots, a_m, a$ — вершины и одна точка какого-нибудь симплекса Δ, $b_i = f(a_i), b = f(a)$ — их образы. Пусть $g : \Delta \to S^n$ — аффинное отображение, для которого $g(a_i) = b_i$, и пусть $c = g(a)$. Точки b и c не являются взаимно противоположными, так что их можно соединить единственной дугой большого круга, меньшей половины окружности. Стянем b к c вдоль этой дуги — это определяет гомотопию отображения f к g на симплексе Δ. Этот процесс нужно теперь проделать для всех симплексов разбиения. □

Следствие. $\pi_m(S^n) = 0$ *при* $m < n$.

Доказательство. Пусть $f : S^m \to S^n$ — сфероид; по лемме, он гомотопен кусочно-линейному отображению, которое мы тоже обозначим f. Образ отображения f состоит из конечного числа симплексов размерности $m < n$, и поэтому не покрывает всей сферы S^n. Пусть $a \notin f(S^m)$, b — точка, противоположная a. Множество $S^m \setminus \{a\}$ можно стянуть в точку b; композиция этого стягивания с f даст гомотопию между f и отображением всей сферы S^m в точку b. □

Лемма 2. *Пусть $a, b \in K_n$ — две точки n-мерного куба. Тогда существует гомотопия D_t, состоящая из гомеоморфизмов шара, постоянная на его границе и такая, что $B_0 = \mathrm{Id}$ и $D_1(a) = b$.*

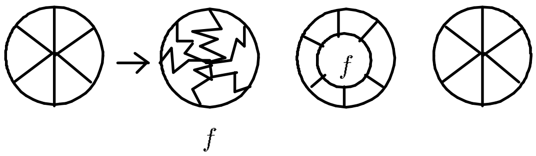
Доказательство проводится прямой конструкцией (проведите !).

Надстройкой над топологическим пространством X называется топологическое пространство $\Sigma X = X \times [0,1]/((a,0) \sim (b,0), (a,1) \sim (b,1) \forall a, b \in X)$; надстройкой над отображением $f : X \to Y$ — отображение $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$, действующее по правилу $(\Sigma f)(x,t) = (f(x), t)$. Очевидно, $\Sigma S^n = S^{n+1}$, и $\Sigma \mathrm{Id}_{S^n} = \mathrm{Id}_{S^{n+1}}$. Также понятно, что если $f \sim g$, то $\Sigma f \sim \Sigma g$. Таким образом, возникает отображение надстройки $\Sigma : \pi_m(S^n) \to \pi_{m+1}(S^{n+1})$.

Теорема 1. *Отображение надстройки $\Sigma : \pi_n(S^n) \to \pi_{n+1}(S^{n+1})$ является изоморфизмом при всяком n.*

Следствие 1. $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$; *образующей группы является класс гомотопии тождественного отображения.*

Следствие 2. *Сфера S^n не стягиваема.*



Доказательство. Пусть $f : S^{n+1} \to S^{n+1}$ — сфероид, и $n \geq 1$; докажем, что существует такой сфероид $g : S^n \to S^n$, что f гомотопно Σg — это докажет эпиморфность гомоморфизма Σ. Прежде всего гомотопией превратим f в кусочно-аффинное отображение. Пусть теперь $a, b \in S^n$ — полюса сферы-образа. Малым шевелением этих точек можно добиться того, чтобы их прообразы $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ состояли из конечного числа точек. Поскольку $n+1 \geq 2$, можно выбрать набор непересекающихся дуг, соединяющих точки $f^{-1}(a)$ с какими-то точками северного, а точки $f^{-1}(b)$ — с точками южного полушария сферы-прообраза. Окружим каждую хорду пленкой, гомеоморфной шару; тогда композиция отображения f и гомотопий D_t из леммы 2 даст отображение, гомотопное f и такое, что $f^{-1}(a)$ лежит в северном, а $f^{-1}(b)$ — в южном полушарии.

Следовательно, образ экватора не содержит полюсов a, b сферы-образа и, в силу компактности, не пересекается с некоторыми открытыми окрестностями U_a, U_n этих полюсов ("полярными шапками"). Существует отображение $g : S^n \to S^n$, гомотопное тождественному и такое, что $g(U_a)$ есть все северное полушарие, а $g(U_b)$ — южное. Композиция $g \circ f$ гомотопна f и переводит северное полушарие в северное, южное в южное и экватор в экватор. Применяя лемму 2, мы можем также добиться, чтобы полюс переходил в полюс.

Применим теперь к полученному отображению гомотопию Александера, изображенную на рисунке — при этом получится надстройка над соответствующим отображением экваторов. Эпиморфность доказана.

Докажем мономорфность. Пусть $F : S^{n+1} \times [0,1] \to S^{n+1}$ — гомотопия, соединяющая отображения Σf_0 и Σf_1; докажем, что ее можно заменить гомотопией, все отображения в которой — надстройки и, следовательно, $f_0 \sim f_1$. При $n = 1$ теорема нам уже известна, так что можно предположить, что $n \geq 2$.

План доказательства такой же, как для эпиморфностм. Сначала доказывается, что отображение F гомотопно кусочно-линейному. Прообразы $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ полюсов теперь представляют собой ломаные; поскольку $n + 1 \geq 3$, можно прогомотопировать отображение так, чтобы эти ломаные лежали в различных полушариях цилиндра $S^{n+1} \times [0,1]$. После этого отображение гомотопируется к отображению, переводящему экватор в экватор, и применяется гомотопия Александера. □

Теорема 2. *При $k \geq 3$ группы $\pi_k(S^3)$ и $\pi_k(S^2)$ изоморфны. В частности, $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Изоморфизм осуществляется отображением $p_* : \pi_k(S^3) \to \pi_k(S^2)$, где $p : S^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа. Действительно, соответствующий участок точной последовательности этого расслоения выглядит так: $0 = \pi_k(S^1) \to \pi_k(S^3) \to \pi_k(S^2) \to \pi_{k-1}(S^1) = 0$. Равенство $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ вытекает теперь из следствия 1. □

Пусть X — n-мерное многообразие. Следствие 1 позволяет определить над X ориентирующее накрытие Y, в точности как было сделано ранее для двумерных многообразий. А именно, для всякой точки $a \in X$ существует ее окрестность U, гомеоморфная n-мерному шару. Множество $U \setminus \{a\}$ гомотопически эквивалентно S^{n-1}, так что $\pi_{n-1}(U \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$. Точками Y будут пары (a, s), где s — одна из двух образующих группы $\pi_{n-1}(U \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$; топология вводится как и раньше. Многообразие X называется ориентируемым, если ориентирующее накрытие тривиально, то есть имеет сечение; это сечение называется ориентацией. Сфера S^n — ориентируемое многообразие.