СЕМИНАР 2

Задача 1. Докажите, что векторы вида

$$v_n = \psi_n \psi_{n-1} \dots \psi_1 v, \qquad v_{-n} = \psi^*_{n-1} \psi^*_{n-2} \dots \psi^*_0 v$$

и только они являются вакуумными для действия алгебры Гейзенберга ($a_i v_n = 0$ для $i < 0$).

Задача 2. Выведите, сравнивая характеры модулей Верма для алгебр Гейзенберга и Клиффорда, *тройное тождество Якоби*:

$$(1-z) \prod_{i=1}^{\infty} (1-q^i z)(1-q^i)(1-q^i z^{-1}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i z^i q^{i(i-1)/2}$$

Задача 3. Пусть M — модуль Верма. Докажите, что для всех $u \in M$, $u^\vee \in M^*$ выполнено

$$\langle u^\vee \left| \psi(z)\psi(w) \right| u \rangle = (z-w) \cdot F_1(z,w), \quad \langle u^\vee \left| \psi^*(z)\psi^*(w) \right| u \rangle = (z-w) \cdot F_2(z,w), \quad \langle u^\vee \left| \psi(z)\psi^*(w) \right| u \rangle = \frac{F_3(z,w)}{z-w}$$

для некоторых многочленов Лорана F_1, F_2, F_3 (зависящих от u и $u^\vee$).

Задача 4. а) Вычислите для соответствующих модулей Верма порядок полюса/нуля по $z-w$ выражений

$$\langle u^\vee \left| P(z)P(w) \right| u \rangle, \quad \langle u^\vee \left| P(z)Q(w) \right| u \rangle, \quad \langle u^\vee \left| \xi(z)\xi(w) \right| u \rangle, \quad \langle u^\vee \left| a(z)a(w) \right| u \rangle, \quad \langle u^\vee \left| a(z)\psi(w) \right| u \rangle$$

б) Опишите полюсную по $z-w$ часть этих выражений как операторы.

Задача 5. Вычислите в соответствующих модулях Верма коммутаторы выражений

а) $L_i = \sum_{i+j=n} a_i a_j$ б) $L_i = \sum_{i+j=n} \xi_i \xi_j$