СЕМИНАР 8

Задача 1. Докажите, что если для оператора $V(z) : M_\lambda \to M_{\lambda+\mu}$ выполнено $[a_i, V(z)] = \mu z^i V(z)$, то $V(z)$ пропорционален вертекс-оператору $V(z,\mu)$.

Задача 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с простыми связями. Докажите, что вертекс-операторы с векторами импульса равными корням образуют алгебру $\widehat{\mathfrak{g}}$. Используя это, постройте фундаментальные представления $\widehat{\mathfrak{g}}$.

Задача 3. Докажите, что для пространств конформных блоков выполнено

$$\langle M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_n} \rangle^{\mathbb{C}P^1}_{z_1,\dots,z_n} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{если } \sum \lambda_i = 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где M_{λ_i} — модули Верма для алгебры Гейзенберга.

Задача 4. а) Используя изоморфизм предыдущей задачи в частном случае

$$\langle M_\lambda, M_\mu, M_{-\lambda-\mu} \rangle^{\mathbb{C}P^1}_{0,z,\infty} \cong \mathbb{C},$$

постройте каноническое отображение векторных пространств

$$Y^z : M_\lambda \otimes M_\mu \to M_{\lambda+\mu}.$$

б) Пусть $v \in M_\mu$ — старший вектор. Докажите, что $Y^z(\bullet, v) : M_\lambda \to M_{\lambda+\mu}$ совпадает с вертекс-оператором $V(z,\mu)$.

в) Пусть теперь $\mu = 0$. Докажите, что $Y^z(\bullet, a_{i_1} \dots a_{i_s} v)$ пропорционально $: \partial^{i_1-1} a(z) \dots \partial^{i_s-1} a(z) :$

г) Что получится в общем случае?