ЭКЗАМЕН

Задача 1. Выразите действие операторов $:\partial\psi(z)\psi^*(z):$ и $:\psi(z)\partial\psi^*(z):$ на модуле Верма через действие $:a(z)a(z):$ и $\partial a(z)$, где $a(z) =: \psi(z)\psi^*(z):$

Задача 2. Пусть V — векторное представление gl_n.

а) Вычислите центральный заряд действия $\widehat{sl_n}$ на полубесконечных формах от $V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ и на полубесконечных формах от $sl_n \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

б) Разложите полубесконечные формы от $V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ на неприводимые представления $\widehat{gl_n}$.

Задача 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\langle\ ,\ \rangle$ — форма Киллинга на ней.

а) Докажите, что всякое центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ эквивалентно

$$[f, g]_c = [f, g] + \phi\left(\langle f, dg\rangle\right) \cdot C$$

для некоторого функционала ϕ на полиномиальных 1-формах, равного нулю на точных формах.

б) Докажите аналогичное утверждение для $\mathfrak{g} \otimes C(M)$, где $C(M)$ — алгебра гладких функций на многообразии M.

Задача 4. Пусть $\psi_\pm(z)$ — бозонные вертекс-операторы с векторами импульса $(\pm 1, 0) \in \mathbb{C}^2$, пусть $\theta_\pm(z)$ — бозонные вертекс-операторы с векторами импульса $(0, \pm\sqrt{-1}) \in \mathbb{C}^2$. Какую алгебру Ли образуют токи $:\psi_+(z)\,\theta_+(z):$ и $:\partial\psi_-(z)\,\theta_-(z):$?

Задача 5. Вычислите размерность пространств конформных блоков для модулей Верма над алгеброй Клиффорда (составленной функциями ψ_i и 1-формами ψ_i^*) а) для $\mathbb{C}P^1$, б) для произвольной кривой.