Напомним, что алгебра Ли комплексных $n \times n$-матриц с нулевым следом называется *специальной линейной алгеброй Ли* и обозначается $\mathfrak{sl}_n$, алгебра Ли группы линейных преобразований, сохраняющих невырожденную симметричную билинейную форму на n-мерном комплексном пространстве, называется *ортогональной алгеброй Ли* и обозначается $\mathfrak{o}_n$, алгебра Ли группы линейных преобразований, сохраняющих невырожденную кососимметричную форму на $2n$-мерном комплексном пространстве, называется *симплектической алгеброй Ли* и обозначается $\mathfrak{sp}_{2n}$.

1. Выпишите матрицы ортогональной алгебры Ли в базисе, в котором матрица формы есть

(**а**) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}$, где E_n — единичная матрица $n \times n$; (**б**) $\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

2. (**а**) К какому каноническому виду можно привести кососимметричную билинейную форму над $\mathbb{C}$? над $\mathbb{R}$?

(**б**) Выпишите матрицы симплектической алгебры Ли в некотором базисе.

3. Вычислите размерности алгебр $\mathfrak{o}_n$, $\mathfrak{sp}_{2n}$.

4. (Весовое разложение) Пусть $\mathfrak{g}$ — одна алгебр $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{o}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$. Выберите (по аналогии с $\mathfrak{sl}_2$) в $\mathfrak{g}$ максимальную абелеву (*картановскую*) подалгебру $\mathfrak{h}$ и разложите $\mathfrak{g}$ по собственным подпространствам относительно присоединённого действия $\mathfrak{h}$. (Напоминание: x присоединённым образом действует на y по формуле $(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y]$.)

5. (Продолжение) Выберите базис в $\mathfrak{h}$ и дополните каждый базисный элемент h_i до подалгебры, изоморфной $\mathfrak{sl}_2$ (выбрав $e_i, f_i \in \mathfrak{g}$) так, чтобы полученные $3 \dim \mathfrak{h}$ элементов порождали всю алгебру $\mathfrak{g}$ (*образующие Шевалле*).

6. Вычислите для $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{o}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ билинейную форму (*форму Киллинга*) на $\mathfrak{g}$, заданную формулой $B(x, y) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$.

7. Докажите, что (**а**) $\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{o}_3 \simeq \mathfrak{sp}_2$; (**б**) $\mathfrak{o}_5 \simeq \mathfrak{sp}_4$; (**в**) $\mathfrak{o}_6 \simeq \mathfrak{sl}_4$.