Конечное подмножество R ненулевых векторов евклидова пространства V называется *системой корней*, если:

- линейная оболочка R есть V;
- для любого вектора $\alpha \in R$ отражение s_α относительно этого вектора переводит множество R в себя;
- для любых $\alpha, \beta \in R$ выполнено условие $s_\alpha(\beta) - \beta = n\alpha, n \in \mathbb{Z}$.

Элементы R называются *корнями*. Размерность пространства V называется *рангом* системы корней.

Система корней называется *приведённой*, если из $\alpha \in R, t\alpha \in R$ следует $t = \pm 1$. Система корней называется *неприводимой*, если пространство V нельзя разложить в ортогональную прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2$, так что $R \subset V_1 \cup V_2$.

1. Опишите неприводимые приведённые системы корней рангов 1 и 2.

2. Опишите возможные значения угла между двумя корнями.

3. Пусть α и β — два неколлинеарных корня, которые образуют острый угол. Тогда их разность — корень.

4. Набор корней называется *системой простых корней*, если эти корни образуют базис пространства V и каждый корень является их линейной комбинацией с целыми коэффициентами одного знака (неотрицательными или неположительными). Докажите, что система простых корней существует. (Указание. Проведём гиперплоскость, не содержащую корней. В качестве системы простых корней можно взять все корни в одном из полупространств, не представимые в виде суммы двух корней.)

5. Докажите, что для двух простых корней α, β верно $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

Группа Вейля системы корней — это подгруппа в группе ортогональных преобразований, порождённая отражениями в корнях.

6. (**а**) Докажите, что с помощью действия группы Вейля можно перевести любую систему простых корней в любую другую. (**б**) Докажите, что любой корень можно дополнить до системы простых корней. (**в**) Докажите, что группа Вейля порождена отражениями в простых корнях (любой системы простых корней).

7. Пусть R — приведённая неприводимая система корней. (**а**) Среди возможных (по задачам 2,5) матриц Грама её системы простых корней найдите все положительно определённые. (Указание. Удобно изображать матрицу Грама в виде графа (схемы Дынкина), вершины которого — простые корни, а на рёбрах написан угол между ними. В терминах этого графа можно найти полный список ограничений (например, этот граф не должен содержать циклов — проверьте!), а потом и составить список таких графов.) (**б**)* Для каждой из найденных матриц Грама постройте соответствующую систему корней.