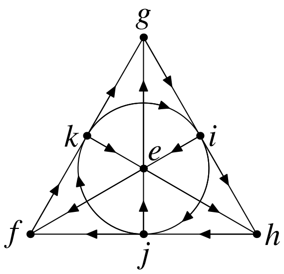

Алгебра октав (чисел Кэли) $\mathbb{O}$ определяется как (неассоциативная) алгебра, базис в которой составляют 1 и ещё семь элементов e, f, g, h, i, j, k, квадрат каждого из которых равен -1, а попарные произведения показаны на рисунке (произведение двух элементов равно третьему на той же прямой/окружности, с точностью до знака, а знак определяется ориентацией стрелок; так, $eh = k$, $fj = -h$).

В алгебре $\mathbb{O}$ можно обнаружить подалгебру кватернионов $\mathbb{H}$, поскольку i, j, k умножаются, как и положено кватернионам. Более того, поскольку $f = ie$, $g = je$, $h = ke$, то алгебру октав можно рассматривать как двумерное пространство над кватернионами, $\mathbb{O} = \{a + be \mid a, b \in \mathbb{H}\}$.

1. Выпишите правила умножения $(a, b \in \mathbb{H})$: $ab = ab + 0 \cdot e$, $a(be) = 0 + \ldots e$, $(ae)b = 0 + \ldots e$, $(ae)(be) = \ldots + 0 \cdot e$.

2. Проверьте, что дифференцирования произвольной алгебры A (линейные преобразования, для которых выполнено правило Лейбница) образуют алгебру Ли относительно коммутатора. Эта алгебра Ли обозначается $\operatorname{Der} A$.

3. Вычислите $\operatorname{Der}(\operatorname{Mat}(n, \mathbb{C}))$.

4. Докажите, что $\operatorname{Der} \mathbb{H} \simeq \mathfrak{so}_3$.

5. Опишите алгебру Ли $\operatorname{Der} \mathbb{O}$: найдите её размерность, базис, весовое разложение. Проверьте, что её система корней есть система G_2.

По аналогии с комплексными числами и кватернионами определим на октавах операцию сопряжения $z \mapsto \overline{z}$, которая сохраняет единицу и меняет знак у остальных элементов базиса. Положим $\operatorname{Re} z = (z + \overline{z})/2$, $\operatorname{Im} z = (z - \overline{z})/2$, $(z_1, z_2) = \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

Для элемента $a \in \mathbb{O}$ пусть L_a и R_a — операторы левого и правого умножения на a, $T_a = L_a + R_a$.

6. Проверьте, что алгебра Ли, порождённая операторами L_a с $\operatorname{Re} a = 0$:

(**а**) содержится в алгебре Ли $\mathfrak{so}_8$ всех кососимметричных относительно формы $(\cdot, \cdot)$ линейных преобразований алгебры $\mathbb{O}$;

(**б**) совпадает с этой алгеброй.

Обозначим через LR (внешний) автоморфизм алгебры $\mathfrak{so}_8$, при котором L_a переходит в R_a. (Проверьте, что такой автоморфизм корректно определён!) Аналогично определим автоморфизм LT.

(**в**) Докажите *инфинитезимальный принцип тройственности Фрейденталя*: для любой тройки кососимметричных линейных операторов на алгебре октав с тождеством

$$Ax \cdot y + x \cdot By = C(xy)$$

верно, что $B = LR(A)$, $C = LT(A)$.

7. Проверьте, что алгебра $\mathfrak{g}_2$ есть подалгебра в $\mathfrak{so}_8$, состоящая из инвариантов автоморфизмов LR и LT.

Алгебра октав является нетривиальным примером *композиционной алгебры*, т. е. евклидова пространства A с операцией (умножения) $A \otimes A \to A$, для которой

$$(ab, ab) = (a, a)(b, b).$$

1. Проверьте это утверждение.

Теорема Гурвица. Все композиционные алгебры над $\mathbb{R}$ суть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

Этот листок содержит (сравнительно подробный) план доказательства теоремы Гурвица.

Пусть A — композиционная алгебра. Далее строчные латинские буквы обозначают её элементы.

2. (**а**) Проверьте, что $(ax, by) + (bx, ay) = 2(a, b)(x, y)$.

(**б**) Определим сопряжение $z \mapsto \overline{z}$ как линейный оператор, который сохраняет единицу и умножает на -1 её ортогональное дополнение. Докажите, что $(ax, y) = (x, \overline{a}y)$ и что $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$.

(**в**) Докажите, что $\overline{b}(ax) + \overline{a}(bx) = 2(a, b)x$.

(**г**) Докажите, что в композиционной алгебре условие ассоциативности выполнено для любых трёх линейно зависимых элементов, и что *ассоциатор* $\{a, b, c\} = (ab)c - a(bc)$ является кососимметричным по своим аргументам (т. е. алгебра *альтернативна*).

(**д**) Проверьте, что выполнено тождество

$$L_a x \cdot y + x \cdot R_a y = T_a(xy).$$

3. (**а**) Докажите, что если в композиционной алгебре выбран ортонормированный базис $e_0 = 1, e_1, \ldots, e_n$, то его элементы (кроме единицы) антикоммутируют и в квадрате равны -1, а при попарно различных положительных p, q, r, s из равенства $e_p e_q = e_r e_s$ следует равенство $e_p e_s = e_q e_r$.

(**б**) Докажите, что можно выбрать ортонормированный базис так, что произведение любых двух базисных элементов — базисный элемент (с точностью до знака).

(**в**) Придумайте, как по таблице умножения в композиционной алгебре построить «проективную геометрию» на множестве базисных элементов (т. е. сказать, какие «точки» лежат на одной «прямой» так, чтобы выполнялись обычные свойства), и докажите, что все точки в этой проективной геометрии лежат в одной плоскости. (Плоскостью, проходящей через две данные прямые ℓ_1, ℓ_2, называется множество точек всех прямых, которые пересекают ℓ_1 и ℓ_2 (в различных точках).)

(**г**) Докажите теорему Гурвица.