## Алгебра Клиффорда, спиноры и всё такое

Пусть $V$ — $n$-мерное векторное пространство. Рассмотрим алгебру Клифforрда $\mathrm{Cl} = \mathrm{Cl}(V \oplus V^*)$.

**1.** Проверьте, что подпространства

(**а**) $\Lambda^2 V \oplus V \otimes V^* \oplus \Lambda^2 V^* \oplus \mathbb{C} \cdot 1$;

(**б**) $\Lambda^2 V \oplus V \otimes V^* \oplus \Lambda^2 V^* \oplus V \oplus V^* \oplus \mathbb{C} \cdot 1$

образуют подалгебры Ли в Cl относительно коммутатора, изоморфные соответственно $\mathfrak{so}_{2n} \oplus \mathbb{C}$ и $\mathfrak{so}_{2n+1} \oplus \mathbb{C}$. (Здесь $\mathbb{C}$, естественно, одномерная абелева алгебра Ли.)

Алгебра Cl действует на $\Lambda^\bullet V$ с помощью операторов умножения и дифференцирования.

**2.** (**а**) Докажите, что если ограничить это действие на $\mathfrak{so}_{2n}$, то $\Lambda^\bullet V = \Lambda^{2\bullet} V \oplus \Lambda^{2\bullet+1} V$ — разложение в сумму неприводимых представлений (одинаковой размерности $2^{n-1}$). Эти представления называются *спинорными*.

(**б**) А если ограничить на $\mathfrak{so}_{2n+1}$?

**3.** Фиксируем базис $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$, пусть $\xi_1^*, \ldots, \xi_n^* \in V^*$ — двойственный базис. Докажите, что оператор $\xi_1 + \xi_1^*$ является изоморфизмом двух спинорных представлений алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}$ как векторных пространств и соответствует внешнему автоморфизму этой алгебры, являющемуся сопряжением с помощью ортогональной матрицы с определителем $-1$.

Пусть теперь $n = 4$.

**4.** (**а**) Придумайте изоморфизмы (как векторных пространств) тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{so}_8$ и её спинорных представлений, и опишите автоморфизмы этой алгебры, которые соответствуют этим изоморфизмам.

(**б**) Придумайте, как построить с помощью выбранных отождествлений (неассоциативное) умножение на 8-мерном пространстве.

(**в**) Как связан обсуждаемый сюжет с алгеброй октав и особенно с принципом тройственности Фрейденталя?