1. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица $n \times n$. Определим алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$ как алгебру Ли с образующими e_i, f_i, h_i $(i = 1, \ldots, n)$ и коммутационными соотношениями $[h_i, h_j] = 0$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$, $[h_i, e_j] = a_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$. Докажите, что имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\mathfrak{g}(A) \simeq \mathrm{Lie}(e_1, \ldots, e_n) \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}(f_1, \ldots, f_n),$$

где $\mathfrak{h}$ — линейная оболочка $h_1, \ldots, h_n$, а $\mathrm{Lie}(X)$ — свободная алгебра Ли, порождённая множеством X.

2. Пусть в условиях предыдущей задачи матрица A имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(а) Докажите, что идеал $\mathfrak{i}_+$ в $\mathfrak{n}_+(A)$, порождённый элементами $(\mathrm{ad}\, e_1)^3 e_2$ и $(\mathrm{ad}\, e_2)^3 e_1$, является идеалом и во всей алгебре $\mathfrak{g}(A)$.

(б) Пусть $\mathfrak{i}_-$ — аналогичный идеал в $\mathfrak{n}_-(A)$. Докажите, что алгебра $\mathfrak{g}(A)/(\mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-)$ изоморфна алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$.

Замечание. Алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ — это «центральное расширение алгебры токов на окружности со значениями в $\mathfrak{sl}_2$»; как векторное пространство она есть $\mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C} \cdot K$, коммутационные соотношения имеют вид $[K, g \otimes p(z)] = 0$, $[g_1 \otimes z^p, g_2 \otimes z^q] = [g_1, g_2] \otimes (p_1(z) p_2(z)) + p\delta_{p,-q}(g_1, g_2) K$. (Здесь (x, y) — форма Киллинга на алгебре $\mathfrak{sl}_2$.)

3. Обозначим через $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ алгебру октав над $\mathbb{C}$.

(а) Постройте естественные биекции между следующими множествами:

- множество шестимерных подалгебр в $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$;
- множество дифференцирований $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, имеющих ранг 2;
- множество двумерных подпространств $V \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, для которых $xy = 0$ при всех $x, y \in V$.

(б) Как известно, дифференцирования $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}_2$. Рассматривая дифференцирования с точностью до умножения на число, можно рассматривать дифференцирования ранга 2 как подмногообразие в $\mathbb{P}\mathfrak{g}_2$. Докажите, что это подмногообразие совпадает с G_2-орбитой прямой ℓ, содержащей корневое пространство для какого-то длинного корня.

4. **(а)** К какому наиболее простому каноническому виду можно привести линейной заменой координат достаточно общую кососимметрическую 3-форму на 5-мерном комплексном пространстве? (Слова «достаточно общую» означают, что можно указать открытое подмножество пространства форм, элементы которого приводятся к такому виду; иными словами, надо проверить, что группа замен координат действует на пространстве форм с открытой орбитой, и явно указать представителя этой орбиты.) Является ли алгебра Ли группы, сохраняющей данную 3-форму, суммой простых? Опишите эту алгебру.

(б) Та же задача для 6-мерного пространства.

(в) Та же задача для 7-мерного пространства. (Указание. Для построения одного из возможных канонических видов можно использовать ассоциатор на мнимых октавах.)

(г) Та же задача для 8-мерного пространства.

(д)* Докажите, что для 9-мерного пространства аналогичная задача неразрешима: у группы замен координат нет открытой орбиты. Приведите пример двух различных орбит максимальной размерности.

5. Напомним, что для подалгебры $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{gl}_n$ можно определить её *картановское продолжение* как наибольшую градуированную подалгебру в алгебре (скажем, полиномиальных) векторных полей на n-мерном пространстве (т. е. полей вида $f_1 \partial_{x_1} + \ldots + f_n \partial_{x_n}$, где f_i — многочлены), которая содержит все «инфинитезимальные сдвиги» $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}$ и пересечение которой с алгеброй линейных векторных полей (естественно отождествляемой с $\mathfrak{gl}_n$) есть $\mathfrak{A}$.

(а) Опишите картановское продолжение алгебры $\mathfrak{o}_n$.

(б) Та же задача для алгебры $\mathfrak{o}_n \oplus \mathbb{C}\mathrm{id}$.

(в) Докажите, что картановское продолжение алгебры $\mathfrak{sp}_{2n}$ совпадает с алгеброй гамильтоновых векторных полей. (Алгебра гамильтоновых векторных полей на $(2n)$-мерном пространстве в одном из определений есть $\mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n]/\mathbb{C} \cdot 1$ со скобкой $[F, G] = \sum_{i=1}^n (\partial_{p_i} F \partial_{q_i} G - \partial_{p_i} G \partial_{q_i} F)$.)

6. Сколько элементов в группе линейных преобразований, сохраняющих невырожденную **(а)** симметричную; **(б)** кососимметричную форму на n-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}_q$? (Выбор формы — на Ваше усмотрение.)

7. Алгебра кватернионов определена и над конечным полем (поскольку соотношения целочисленны).

(**а**) Какой из известных Вам алгебр изоморфна эта алгебра?

(**б**) Сколько элементов в её группе автоморфизмов?

(**в**) Какой из известных Вам групп изоморфна эта группа?

(**г**)* Те же вопросы про группу автоморфизмов алгебры октав.

Для сдачи экзамена не обязательно решить все задачи. О желании сдавать экзамен надо сообщать Володе Доценко (`dotsenko@mccme.ru`, 2554732).