Конспект лекции 1. Симметрические функции. 9 февраля 2004

Алгебра Λ симметрических функций

Рассмотрим алгебру Λ_N симметрических полиномов от N переменных $x_1, \dots, x_N$; основное поле — $\mathbb{C}$. Первый пример симметрических полиномов — элементарные симметрические полиномы, которые мы обозначим через $e_{k|N}$. Здесь индекс N указывает на число переменных, а индекс k — на степень :

$$e_{k|N} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le N} x_{i_1}\dots x_{i_k}\,.$$

Ясно, что k может меняться от 1 до N.

Предложение 1. *Элементы $e_{1|N}$, … $e_{N|N}$ алгебраически независимы и порождают алгебру Λ_N.*

Доказательство приведено в курсе “Алгебра” Кузнецова, 3-й семестр, лекция 8. Ключевую роль в доказательстве играет проекция (морфизм алгебр) $\mathrm{pr}_N : \Lambda_N \to \Lambda_{N-1}$, которая задается так:

$$(\mathrm{pr}_N\, f)(x_1, \dots, x_{N-1}) = f(x_1, \dots, x_{N-1}\,, 0).$$

Существенно, что при этой проекции $e_{k|N}$ переходит в $e_{k|N-1}$ для всех $k = 1, \dots, N-1$, тогда как старший элемент $e_{N|N}$ переходит в 0. Более того, идеал $I_N = \ker \mathrm{pr}_N \subset \Lambda_N$ — ядро проекции — порожден элементом $e_{N|N}$.

Заметим, что алгебра Λ_N является градуированной алгеброй, и обозначим через Λ_N^k ее компоненту степени k (однородные симметрические полиномы степени k). Заметим далее, что Λ_N^k имеет нулевое пересечение с I_N, если $k < N$. Отсюда видно, что $\mathrm{pr}_N : \Lambda_N^k \to \Lambda_{N-1}^k$ есть изоморфизм векторных пространств для всех $N > k$. Иными словами, при фиксации степени k пространство Λ_N^k стабилизируется с ростом N.

Это наводит на мысль, что можно определить аналог алгебр Λ_N с $N = \infty$.

Формальное определение: *алгебра симметрических функций* есть градуированная алгебра $\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k$, где Λ^k определяется следующим образом. Рассмотрим пространство однородных полиномов степени k от счетного числа переменных $x_1, x_2, \dots$ (его элементы суть формальные бесконечные суммы однородных мономов) и затем выделим в нем подпространство полиномов, инвариантных относительно любых перестановок переменных.

Альтернативное определение: всякий элемент пространства Λ^k есть бесконечная последовательность $f = (f_1, f_2, \dots)$, такая, что $f_N \in \Lambda_N^k$ и $\mathrm{pr}_N(f_N) = f_{N-1}$. Алгебраические операции над такими последовательностями производятся покоординатно. Отметим, что если рассматривать f как полином от $x_1, x_2, \dots$ (согласно первому определению), то f_N получается из него подстановкой $x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0$.

Отсюда ясно, что элементы алгебры Λ можно рассматривать как функции на векторах $x = (x_1, x_2, \dots)$ с конечным числом ненулевых координат.

Примером элементов алгебры Λ служат *элементарные симметрические функции*

$$e_k = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k<\infty} x_{i_1}\dots x_{i_k}$$

(формула та же, что выше, но снято ограничение $i_k \le N$).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

Предложение 2. *Элементы $e_1, e_2, \ldots \in \Lambda$ алгебраически независимы и порождают алгебру Λ.*

Разбиения

Разбиением называется невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0)$, такая, что $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \cdots = 0$ для некоторого номера l; минимальное такое l называется *длиной* разбиения и обозначается через $\ell(\lambda)$.

Положим $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$. Это число конечно; говорят, что λ есть *разбиение неотрицательного целого числа* n, если $|\lambda| = n$. Обозначим через Par_n множество всех разбиений данного числа n; это множество конечно. Множество всех разбиений обозначим через Par; это множество счетно.

В записи разбиения разрешается обрывать последовательность (λ_i) в любом месте после номера $\ell(\lambda)$.

Мономиальные функции

Мономиальная симметрическая функция с индексом $\lambda \in \mathrm{Par}$ (обозначение: $m_\lambda = m_\lambda(x_1, x_2, \ldots)$) есть сумма всех *различных* мономов, которые можно получить из монома $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_l^{\lambda_l}$, где $l = \ell(\lambda)$, всевозможными перестановками переменных $x_1, x_2, \ldots$. Это элемент алгебры Λ.

Примеры:

$$m_{(2,1)}(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i^2 x_j \,, \qquad m_{(2,2,1)}(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{\substack{i,j,k \\ i<j \\ k\neq i,\, k\neq j}} x_i^2 x_j^2 x_k$$

Предложение 3. *Мономиальные симметрические функции образуют однородный базис в Λ.*

Доказательство тривиально.

Функции e_k, h_k, p_k и их производящие ряды

Заметим, что элементарные симметрические функции являются частным случаем мономиальных функций:

$$e_k = m_{(1^k)} \,, \qquad \text{где } (1^k) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}).$$

Введем еще одно два семейства симметрических функций — *полные однородные симметрические функции*

$$h_k = \sum_{\lambda:\, |\lambda| = k} m_\lambda$$

и *суммы Ньютона*

$$p_k(x_1, x_2, \dots) = x_1^k + x_2^k + \dots .$$

Во всех трех случаях $k = 1, 2, \dots$.

Все три семейства функций $\{e_k\}$, $\{h_k\}$, $\{p_k\}$ можно задать с помощью *производящих рядов*. Последние суть формальные степенные ряды над Λ:

$$E(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k t^k, \qquad H(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k, \qquad P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k.$$

Предложение 4. *Справедливы формулы*

$$\begin{gathered}
(E(t))(x_1, x_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t) \\
(H(t))(x_1, x_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t} \\
H(t) E(-t) = 1 \\
H(t) = \exp P(t), \qquad E(t) = \exp(-P(-t)).
\end{gathered}$$

Предложение 5. *Подобно $\{e_k\}$, каждое из семейств $\{h_k\}$, $\{p_k\}$ является системой алгебраически независимых образующих алгебры Λ.*

Идея доказательства. Справедлива следующая лемма: предположим, что $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ — два семейства элементов некоторой алгебры, причем элементы второго семейства выражаются через элементы первого по формулам вида $b_k = \mathrm{const}\, a_k + Q_k(a_1, \dots, a_{k-1})$, где $\mathrm{const} \neq 0$, а Q_k — некоторые полиномы; тогда, если $\{a_k\}$ есть система алгебраически независимых образующих, то $\{b_k\}$ обладает тем же свойством. Соотношения между производящими рядами показывают, что $\{h_k\}$ выражается через $\{e_k\}$ как в лемме, и то же верно для $\{p_k\}$. Поэтому все сводится к предложению 2.

Функции e_λ, h_λ, p_λ

Для произвольного разбиения $\lambda \in \mathrm{Par}$ длины $l = \ell(\lambda)$ полагаем

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_l}, \qquad h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_l}, \qquad p_\lambda = p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_l}.$$

Из предложения 5 следует

Предложение 6. *Каждое из семейств $\{e_\lambda\}$, $\{h_\lambda\}$, $\{p_\lambda\}$ является однородным базисом в алгебре Λ.*