Конспект лекции 2. Диаграммы Юнга. 16 февраля 2004

По каждому разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ рисуем геометрическую фигуру на клетчатой бумаге — диаграмму Юнга. Это набор квадратиков, выровненный по левому краю. В i–ом ряду помещаем λ_i квадратиков.

Обозначение $\mu \nearrow \lambda$ означает, что диаграмма μ получается из диаграммы λ удалением одной клетки. Обозначим через $\mathbb{Y}_n$ множество диаграмм Юнга с n клетками, а через $\mathbb{Y}$ множество всех вообще диаграмм Юнга, т.е. объединение множеств $\mathbb{Y}_n$ по всем $n = 0, 1, 2, \dots$.

Граф Юнга: по определению, множество его вершин есть $\mathbb{Y}$, а его ребра образованы парами $\mu \nearrow \lambda$. Будем считать, что ребро ориентировано от μ к λ.

Размерность диаграммы λ (обозначается через $\dim \lambda$): это число ориентированных путей из пустой диаграммы $\varnothing \in \mathbb{Y}_0$ в диаграмму λ.

Стандартная таблица формы $\lambda \in \mathbb{Y}_n$: это заполнение клеток диаграммы натуральными числами от 1 до n, такое, что числа возрастают слева направо и сверху вниз.

Число стандартных таблиц данной формы λ равно $\dim \lambda$.

Займемся вопросом вычисления функции $\dim \lambda$. Забегая вперед, отметим, что $\dim \lambda$ равна размерности неприводимого представления, отвечающего λ. Это одна из причин, почему функция $\dim \lambda$ важна.

Фундаментальное рекуррентное соотношение

$$\dim \lambda = \sum_{\mu:\ \mu \nearrow \lambda} \dim \mu \tag{1}$$

вместе с начальным условием $\dim \varnothing = 1$ определяет функцию $\dim$ однозначно. Если мы найдем его решение, то мы найдем $\dim$.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ и пусть натуральное число N настолько велико, что $\lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = \dots = 0$. Тогда*

$$\dim \lambda = \frac{n! \prod\limits_{1 \le i, j \le N} (\lambda_i - \lambda_j - i + j)}{\prod\limits_{r=1}^{N} (\lambda_r - r + N)!} \tag{2}$$

Доказательство. Будем проверять, что функция, заданная правой частью формулы (2), удовлетворяет рекуррентному соотношению.

Шаг 1. Проверяем, что выражение в правой части (2) стабильно по N.

Шаг 2. Формула (2) справедлива для $\lambda = \varnothing$.

Шаг 3. Положим $u_r = \lambda_r + N - r$, $r = 1, \dots, N$, и

$$\Delta(u_1, \dots, u_N) = \prod_{1 \le i < j \le N} (u_i - u_j).$$

Соотношение (1) эквивалентно следующему:

$$\sum_{r=1}^{N} u_r \Delta(u_1, \dots, u_r - 1, \dots, u_N) = \left(u_1 + \dots + u_N - \frac{N(N-1)}{2} \right) \Delta(u_1, \dots, u_N) \tag{3}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(в левой части единичка вычитается из r-й переменной). Мы будем рассматривать (3) как алгебраическое тождество. Важное замечание: если $\lambda_r = \lambda_{r-1}$, то есть из r–ой строки удалить клетку нельзя, то формула (3) учитывает это автоматически: соответствующий член обращается в нуль.

Шаг 4. Проверяем, что левая часть в (3) есть антисимметрический многочлен.

Шаг 5. Отсюда следует, что он делится на $\Delta(u_1, \dots, u_N)$, причем результат деления есть некоторый симметрический многочлен g: см., например, А.И.Кострикин, Введение в алгебру (Москва, Наука, 1977), гл. 6, §2, упр. 3. Подсчет степени и учет старшей однородной компоненты показывает, что $g = u_1 + \dots + u_N + \mathrm{const}$.

Шаг 6. Для определения константы подставим $(u_1, \dots, u_N) = (N-1, N-2, \dots, 0)$. Проверяем, что левая часть в (3) обращается в 0. Отсюда $\mathrm{const} = -N(N-1)/2$. $\square$

Заметим, что $\dim\lambda = \dim\lambda'$, где λ' — транспонированная диаграмма. Однако из формулы (2) это не видно. Мы получим сейчас два других выражения для dim, которые делают симметрию $\dim\lambda = \dim\lambda'$ очевидной.

Длина крюка клетки $(i,j) \in \lambda$ определяется как $h(i,j) = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$. Положим

$$H(\lambda) = \prod_{(i,j)\in\lambda} h(i,j).$$

Теорема 2 (формула крюков). *Пусть* $\lambda \in \mathbb{Y}_n$. *Тогда*

$$\dim\lambda = \frac{n!}{H(\lambda)}.$$

Доказательство. Обозначим через N длину первого столбца в λ (т.е. $N = \lambda'_1$). Покажем, что в обозначениях теоремы 1

$$\frac{1}{H(\lambda)} = \frac{\Delta(u_1, \dots, u_N)}{\prod\limits_{r=1}^{N} u_r!}.$$

Применим индукцию по числу клеток в λ. Обозначим через λ° диаграмму, получающуюся из λ вычеркиванием первого столбца. При переходе от λ к λ° все координаты u_i уменьшаются на 1. По предположению индукции

$$\frac{1}{H(\lambda^\circ)} = \frac{\Delta(u_1 - 1, \dots, u_N - 1)}{\prod\limits_{r=1}^{N} (u_r - 1)!}.$$

Но $\Delta(u_1, \dots, u_N) = \Delta(u_1 - 1, \dots, u_N - 1)$ и легко видеть, что

$$\frac{H(\lambda)}{H(\lambda^\circ)} = \prod_{r=1}^{N} u_r = \frac{\prod\limits_{r=1}^{N} u_r!}{\prod\limits_{r=1}^{N} (u_r - 1)!}$$

(отношение в левой части равно произведению длин крюков для клеток из первого столбца). $\square$

Введем важное определение: координаты Фробениуса диаграммы λ. Обозначим через d количество клеток на диагонали и положим

$$p_i = \lambda_i - i, \qquad q_i = \lambda'_i - i, \qquad i = 1, \dots, d.$$

Это и есть координаты Фробениуса. В обозначениях Фробениуса диаграмма записывается как $(p_1, \dots, p_d \mid q_1, \dots, q_d)$. Отметим, что

$$p_1 > \dots > p_d \geq 0, \qquad q_1 > \dots > q_d \geq 0.$$

Смысл координат Фробениуса в том, чтобы уравнять в правах строки и столбцы. При транспонировании диаграммы $p_i \leftrightarrow q_i$.

Теорема 3. *Пусть $\lambda = (p_1, \dots, p_d \mid q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Y}_n$. Справедлива формула*

$$\dim \lambda = \frac{n! \Delta(p_1, \dots, p_d) \Delta(q_1, \dots, q_d)}{\prod\limits_{i=1}^{d} p_i! q_i! \prod\limits_{1 \leq i,j \leq d} (p_i + q_j + 1)}$$

Доказательство. Разрежем диаграмму λ на три части: квадрат $\square$ размера $d \times d$, диаграмму λ^+, лежащую справа от квадрата, и диаграмму λ^-, лежащую под квадратом (последнюю удобно предварительно транспонировать).

Теперь замечаем, что двойное произведение по i, j есть произведение длин крюков тех клеток диаграммы λ, которые лежат в квадрате. Произведение длин крюков по клеткам, лежащих справа, совпадает с $\prod\limits_{i=1}^{d} p_i! / \Delta(p_1, \dots, p_d)$ (применяем теоремы 1 и 2 к диаграмме λ^+). Аналогично, произведение длин крюков по клеткам, лежащих под квадратом, совпадает с $\prod\limits_{i=1}^{d} q_i! / \Delta(q_1, \dots, q_d)$. $\square$