Конспект лекции 3. Функции Шура. 1 марта 2004

Определение полиномов и функций Шура

Пусть λ — разбиение и $\ell(\lambda)$ — его длина и $N \geq \ell(\lambda)$ — натуральное число. Положим

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det\left[x_j^{\lambda_i+N-i}\right]}{\det\left[x_j^{N-i}\right]},$$

где определители имеют порядок N.

Введем еще обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ — набор из N неотрицательных чисел,

$$\delta = (N-1,\, N-2,\, \dots, 0)$$

и

$$\operatorname{alt}_\alpha(x_1, \dots, x_N) = \det\left[x_j^{\alpha_i}\right] = \sum_{w \in S_n} \operatorname{sgn}(w) x_{w(1)}^{\alpha_1} \dots x_{w(N)}^{\alpha_N}$$

— от слова альтернант (alternant); имеется в виду альтернирование по симметрической группе, переставляющей переменные (эквивалентно, индексы). В этих обозначениях

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\operatorname{alt}_{\lambda+\delta}(x_1, \dots, x_N}{\operatorname{alt}_\delta(x_1, \dots, x_N)}.$$

Справедливы следующие утверждения.

• Альтернанты $\operatorname{alt}_\alpha(x_1, \dots, x_N)$ являются антисимметрическими полиномами.

• При перестановке индексов α_i они лишь умножаются на ± 1.

• Тем самым, альтернант с двумя совпадающими индексами равен 0, и всякий ненулевой альтернант приводится к виду $\operatorname{alt}_{\lambda+\delta}$.

• Альтернанты вида $\operatorname{alt}_{\lambda+\delta}$ образуют однородный базис в алгебре антисимметрических полиномов от N переменных.

• Всякий альтернант делится на

$$\operatorname{alt}_\delta(x_1, \dots, x_N) = \Delta(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j).$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Функции $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$, где $\ell(\lambda) \leq N$, являются однородными симметрическими полиномами и образуют базис в алгебре Λ_N симметрических полиномов от N переменных.*

Функции $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$ называются *полиномами Шура* (Schur polynomials).

Справедливы следующие утверждения.

• $\deg s_\lambda = |\lambda| = \sum_i \lambda_i$.

• Если каждую координату λ_i, где $i = 1, \dots, N$, увеличить на 1, то полином Шура умножится на $x_1 \dots x_N$.

• Свойство стабильности:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = s_\lambda(x_1, \dots, x_{N-1}),$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

с соглашением, что $s_\lambda(x_1,\dots,x_{N-1})=0$, если $N-1<\ell(\lambda)$.

По определению алгебры Λ симметрических функций, последовательность полиномов Шура с фиксированным индексом λ и переменным N задает некоторый элемент алгебры Λ. Последний называется *функцией Шура* и обозначается $s_\lambda(x_1,x_2,\dots)$ или просто s_λ. Функции Шура образуют однородный базис в Λ.

Разложение по полиномам Шура

Пусть $F(x_1,\dots,x_N)$ — симметрический полином или даже симметрический формальный степенной ряд. Тогда его можно разложить по полиномам Шура:

$$F(x_1,\dots,x_N)=\sum_{\lambda:\,\ell(\lambda)\le N} c_\lambda\, s_\lambda\,.$$

Общий принцип разложения по полиномам Шура. *Коэффициент c_λ равен коэффициенту при мономе $x^{\lambda+\delta}=x_1^{\lambda_1+N-1}\dots x_N^{\lambda_N}$ в антисимметрическом полиноме или ряде $F(x_1\dots,x_N)\cdot\Delta(x_1,\dots,x_N)$.*

Вот первое приложение этого принципа:

Теорема 2. *Пусть $f(x)=\sum f_m x^m$ — произвольный формальный степенной ряд, $f_0=1$, $f_{-1}=f_{-2}=\dots=0$. Тогда*

$$f(x_1)\dots f(x_N)=\sum_{\lambda:\,\ell(\lambda)\le N}\det\left[f_{\lambda_i-i+j}\right]\cdot s_\lambda\,.$$

Новый вывод формулы Фробениуса для $\dim\lambda$

Напомним, что $p_1=x_1+x_2+\dots$ и что $\nu\searrow\lambda$ означает, что ν получается из λ добавлением одной клетки.

Лемма 3.

$$s_\lambda\cdot p_1=\sum_{\nu:\,\nu\searrow\lambda} s_\nu\,.$$

Отсюда проистекает

Теорема 4.

$$p_1^n=\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n}\dim\lambda\cdot s_\lambda\,.$$

Наша цель — заново вывести отсюда формулу Фробениуса в следующем виде

Теорема 5.

$$\dim\lambda=n!\,\det\left[\frac{1}{(\lambda_i-i+j)!}\right]$$

Пояснение. Напомним, что если $m=1,2,\dots$, то $1/(-m)!=0$. Порядок матрицы в этой формуле — любое число $N\ge\ell(\lambda)$. Как обычно, $n=|\lambda|$.

Доказательство. Применяем теорему 2 к ряду $f(x) = e^x$. Тогда пользуемся тем, что для любого N

$$f(x_1)\dots f(x_N) = e^{p_1(x_1,\dots,x_N)}\,.$$

Формула Фробениуса в другой, но эквивалентной формулировке была доказана в лекции 2.[1] Но то доказательство состояло в проверке готовой формулы, неизвестно как полученной, тогда как в новом доказательстве формула выводится. Теорема 4 есть первое указание на связь между диаграммами Юнга и графом Юнга, с одной стороны, и функциями Шура, с другой. Эта связь очень глубока.

Коши и Якоби–Труди

Следующий важный результат, известный как *формула Якоби–Труди* (Jacobi–Trudi), выражает функции Шура через полные однородные симметрические функции $h_1, h_2, \dots$. Удобно считать, что $h_0 = 1$, $h_{-1} = h_{-2} = \dots = 0$.

Теорема 6 (Формула Якоби–Труди).

$$s_\lambda = \det\left[h_{\lambda_i - i + j}\right],$$

Пояснение. Порядок определителя здесь — любое натуральное $N \ge \ell(\lambda)$.

Следствие 7. *Функции $h_1, h_2, \dots$ суть частные случаи функций Шура, отвечающие однострочечным диаграммам:*

$$h_m = s_{(m)}\,.$$

Теорема 6 эквивалентна следующей теореме, известной как *тождество Коши* (Cauchy).

Теорема 8 (Тождество Коши). *Для любого натурального N*

$$\prod_{i,j=1}^{N} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda:\ \ell(\lambda)\le N} s_\lambda(x_1,\dots,x_N)\, s_\lambda(y_1,\dots,y_N).$$

Доказательство эквивалентности Якоби–Труди и Коши. В силу теоремы 2

$$\prod_{i,j=1}^{N} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda:\ \ell(\lambda)\le N} \det\left[h_{\lambda_i - i + j}(y_1,\dots,y_N)\right] \cdot s_\lambda(x_1,\dots,x_N).$$

□

Докажем теорему 8. Нам понадобится лемма, важная сама по себе. Ее доказательство отнесено в упражнения.

[1] По поводу эквивалентности см. лекцию 2'.

Лемма 9 (Формула Коши).

$$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{i,j=1}^{N} = \frac{\Delta(x_1,\ldots,x_N)\Delta(y_1,\ldots,y_N)}{\prod\limits_{i,j=1}^{N}(1-x_iy_j)}$$

Доказательство тождества Коши. В силу леммы, тождество Коши можно записать в виде

$$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{i,j=1}^{N} = \sum_{\lambda:\ \ell(\lambda)\le N} \operatorname{alt}_{\lambda+\delta}(x_1,\ldots,x_N)\operatorname{alt}_{\lambda+\delta}(y_1,\ldots,y_N).$$

А это легко проверяется. $\square$