Конспект лекции 4. Двойственность Шура–Вейля. 15 марта 2004

Обозначим через $S(n)$ симметрическую группу (перестановки множества из n элементов), а через $GL(N,\mathbb{C})$ или для краткости $GL(N)$ — полную линейную группу (обратимые линейные преобразования пространства $\mathbb{C}^N$).

Рассмотрим пространство тензоров

$$V = (\mathbb{C}^N)^{\otimes n} = \underbrace{\mathbb{C}^N \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n}_{n} .$$

В нем действуют представление π группы $S(n)$ и представление Π группы $GL(N)$

$$\pi(s)\,(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{s(1)} \otimes \cdots \otimes v_{s(n)}, \qquad s \in S(n)$$
$$\Pi(g)\,(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (gv_1) \otimes \cdots \otimes (gv_n), \qquad g \in GL(N).$$

Эти представления перестановочны: $\pi(s)\Pi(g) = \Pi(g)\pi(s)$.

Условимся обозначать через $\operatorname{End}\mathcal{V}$ алгебру линейных операторов в данном конечномерном пространстве $\mathcal{V}$. Если $A \subset \operatorname{End}\mathcal{V}$ — некоторое множество линейных операторов, условимся обозначать через A' его *коммутант* — множество всех операторов, перестановочных с операторами из A; это всегда подалгебра в $\operatorname{End}\mathcal{V}$.

Обозначим через $A(\pi)$ и $A(\Pi)$ подалгебры в $\operatorname{End} V$, порожденные операторами представлений π и Π, соответственно.

Предложение 1. $(A(\pi))' = A(\Pi)$.

Доказательство. Используется рассуждение, приведенное в книге Г.Вейль, Классические группы, теорема IV.4.E. $\square$

Несколько определений. Предположим, что $\mathcal{V}$ — конечномерное пространство и A — подалгебра в $\operatorname{End}\mathcal{A}$, содержащая 1. Будем рассматривать $\mathcal{V}$ как A–модуль. Скажем, что:

• A *неприводима*, если этот модуль является простым (т.е. в $\mathcal{V}$ нет собственных инвариантных подпространств);

• A *вполне приводима*, если этот модуль является полупростым (т.е. каждое инвариантное подпространство допускает инвариантное дополнение);

• A *примарна*, если этот модуль примарен, т.е. является прямой суммой некоторого числа эквивалентных неприводимых модулей.

Предложение 2. *Пусть $A \subset \operatorname{End}\mathcal{V}$ — полупростая алгебра, содержащая 1.*

(1) *A–модуль $\mathcal{V}$ канонически разлагается в прямую сумму примарных модулей,*

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k .$$

(2) *Каждое пространство $\mathcal{V}_i$ можно (не канонически) записать в виде $\mathcal{U}_i \otimes \mathcal{W}_i$ так, что в этой записи*

$$A \text{ отождествляется с } \bigoplus_{i=1}^{k} (\operatorname{End}\mathcal{U}_i) \otimes 1_{\mathcal{W}_i},$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

где $1_{\mathcal{W}_i}$ — *единичный оператор в* $\mathcal{W}_i$.

(3) *В этой же записи*

$$A' \text{ отождествляется с } \bigoplus_{i=1}^{k} 1_{\mathcal{U}_i} \otimes (\operatorname{End} \mathcal{W}_i).$$

(4) $A'' = A$.

Доказательство. См., например, учебник Э.Б.Винберг, Алгебра, глава 11. □

Это утверждение можно применить к алгебре $A(\pi) \subset \operatorname{End} V$; она полупроста, поскольку представление π унитарно (операторы $\pi(s)$, где $s \in S(n)$, очевидно, сохраняют каноническое скалярное произведение в V).

Ввиду перестановочности представление π и Π мы можем рассматривать их вместе как представление группы $S(n) \times GL(N)$. Об этом представлении и идет речь ниже.

Следствие 3. *Совместное представление группы* $S(n) \times GL(N)$ *в пространстве* V *можно записать в виде*

$$\bigoplus_{\alpha} (\pi_\alpha \otimes \Pi_\alpha), \tag{1}$$

где α *пробегает некоторое конечное множество индексов,* π_α *и* Π_α — *некоторые неприводимые представления групп* $S(n)$ *и* $GL(N)$ *соответственно, причем (что особенно важно) представления* π_α *и* π_β *при* $\alpha \neq \beta$ *не эквивалентны, и то же верно для* Π_α *и* Π_β.

Ниже мы конкретизируем множество индексов.

Конечномерное представление группы $GL(N)$ назовем *полиномиальным*, если его матричные коэффициенты суть полиномиальные функции. Более подробно, если обозначать операторы представления через $T(g)$, то для любого вектора v из пространства представления и любого вектора v' из дуального пространства функция на группе $\langle T(g)v, v' \rangle$ представима в виде полинома от элементов g_{ij} матрицы $g \in GL(N)$.

Следующий фундаментальный результат мы примем без доказательства:

Теорема 4. *Неприводимые полиномиальные представления группы* $GL(N)$ *параметризуются разбиениями* λ *с* $\ell(\lambda) \leq N$, *причем характер представления с меткой* λ, *рассматриваемый как функция от матрицы из* $GL(N)$, *есть полином Шура* $s_\lambda(x_1, \ldots, x_N)$ *от собственных значений матрицы.*

Легко видеть, что представление Π полиномиально. Поэтому полиномиальны и все неприводимые представления Π_α, участвующие в его разложении. Стало быть, мы можем теперь вместо неопределенных индексов α использовать разбиения λ. Мы только пока не знаем, какие точно разбиения участвуют в разложении нашего тензорного пространства при данных N и n.

Чтобы прояснить этот вопрос, мы вычислим характер $\chi(s, g)$ нашего совместного представления.

Предложение 5. *Обозначим через $\rho \vdash n$ цикловую структуру перестановки $s \in S(n)$, а через $(x_1, \ldots, x_N)$ — набор собственных значений матрицы $g \in GL(N)$. Тогда*

$$\chi(s, g) = p_\rho(x_1, \ldots, x_N).$$

Это доказывается прямой выкладкой.

Теорема 6. *Рассмотрим разложение функции p_ρ, где $\rho \vdash n$, по функциям Шура,*

$$p_\rho = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\rho^\lambda s_\lambda \,, \tag{2}$$

тогда коэффициенты χ_ρ^λ этого разложения образуют таблицу характеров симметрической группы $S(n)$.

Доказательство. Те неприводимые представления Π_α группы $GL(N)$, которые входят в разложение представления Π и которые мы раньше обозначали через Π_α, а теперь вправе обозначать через Π_λ, соответствуют непременно разбиениям λ с $|\lambda| = n$. В самом деле, матричные коэффициенты должны быть однородными полиномами степени n, а поскольку это полиномы Шура $s_\lambda(x_1, \ldots, x_N)$, то мы получаем $|\lambda| = n$.

Далее, возьмем $N \geq n$ и заметим, что тогда неприводимые представления группы $S(n)$, входящие в разложение представления π (и которые мы раньше обозначали π_α, а теперь вправе обозначать π_λ), суть в точности все неприводимые представления группы $S(n)$. В самом деле, нетрудно проверить, что при $N \geq n$ представление π группы $S(n)$ содержит ее регулярное представление; следовательно, в его разложении участвуют все неприводимые представления. Но число неприводимых представлений группы $S(n)$ равно числу классов сопряженных элементов. Отсюда следует, что в разложении (1) мы можем заменить α на λ и считать, что λ пробегает в точности все разбиения числа n.

А тогда, обозначив через χ_ρ^λ таблицу характеров группы $S(n)$ и применяя предложение 5 и теорему 6, мы заключаем, что справедливо равенство

$$p_\rho(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\rho^\lambda s_\lambda(x_1, \ldots, x_N) \,, \qquad \forall N \geq n, \tag{3}$$

что влечет требуемую формулу (2) в алгебре Λ. $\square$

Если $N < n$, то в правой части формулы (3) выживают те λ, для которых $\ell(\lambda) \leq N$. Поэтому в случае произвольных N и n формула (3) корректируется следующим образом:

$$p_\rho(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \leq N}} \chi_\rho^\lambda s_\lambda(x_1, \ldots, x_N) \tag{4}$$

Теперь мы можем уточнить следствие 3, заменив неопределенное множество индексов α на множество разбиений $\lambda \vdash n$ с $\ell(\lambda) \leq N$. Соответствие $\pi_\lambda \leftrightarrow \Pi_\lambda$, возникающее в результате разложения совместного представления группы $S(n) \times GL(N)$, называется *двойственностью Шура–Вейля*.

Формулу (2) удобно переписать в виде

$$\chi^\lambda_\rho = [p_\rho \,:\, s_\lambda], \tag{5}$$

где символ в правой части означает "коэффициент при s_λ в разложении элемента $p_\rho \in \Lambda$ по функциям Шура". Формула (5) играет фундаментальную роль в теории представлений симметрических групп: на ней основаны все известные формулы и алгоритмы для вычисления характеров.