Введение в алгебраическую комбинаторику. Экзамен. 25 апреля 2004.

1. Представьте функцию h_4 как линейную комбинацию элементарных симметрических функций e_λ.

2. Докажите тождество

$$h_a e_b = s_{(a+1,1^{b-1})} + s_{(a,1^b)},$$

где через (1^b) обозначено разбиение, состоящее из b единиц.

3. Докажите тождество

$$\sum_{j=0}^{b} (-1)^j h_{a+j}\, e_{b-j} = s_{(a,1^b)},$$

где $a, b \geq 1$.

4. Вычислите значение неприводимого характера $\chi^{(2,1^{n-2})}$ симметрической группы S_n на элементе произвольного циклового типа ρ, $|\rho| = n$ через $m_j(\rho)$, где

$$m_j(\rho) = |\{1 \leq k \leq \ell(\rho) \mid \rho_k = j\}|.$$

5. Докажите тождество

$$p_n = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{n-t} s_{(t,1^{n-t})}.$$

6. Рассмотрим всевозможные пары (P, Q) стандартных таблиц формы $(n, 1)$ и соответствующие им по алгоритму Робинсона-Шенстеда перестановки. Докажите, что ровно $n(n-1)$ перестановок из них имеют только одну самую длинную возрастающую подпоследовательность.