Введение в алгебраическую комбинаторику. Листок 1. 9 февраля 2004

1. Обозначим через $p(n)$ число разбиений натурального числа n. Докажите, что

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)t^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}.$$

2. Обозначим через $p_{odd}(n)$ число тех разбиений натурального числа n, у которых все ненулевые части нечетны, а через $p_{strict}(n)$ число тех разбиений натурального числа n, у которых нет повторяющихся ненулевых частей. Выпишите производящие функции для $p_{odd}(n)$ и $p_{strict}(n)$ и докажите с их помощью, что $p_{odd}(n) = p_{strict}(n)$ (теорема Эйлера).

3. Обозначим через $\mathbb{C}_1^\infty$ множество последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ комплексных чисел, таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$. Докажите, что элементы алгебры Λ могут быть корректно определены как функции на $\mathbb{C}_1^\infty$.

4. Пусть $f(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \in \mathbb{C}[[t]]$ — произвольный формальный степенной ряд. Разложите $\prod_{i=1}^{\infty} f(x_i t)$ по мономиальным симметрическим функциям.

5. Докажите, что $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$. Выведите отсюда, что

$$e_n = \det[h_{1-i+j}], \qquad h_n = \det[e_{1-i+j}].$$

(индексы i, j принимают значения $1, \dots, n$, так что определители имеют порядок n; предполагается также, что $e_0 = 1$, $e_{-1} = e_{-2} = \dots = 0$, $h_0 = 1$, $h_{-1} = h_{-2} = \dots = 0$).

6. Докажите, что $ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}$. Выведите отсюда, что

$$p_n = \det \begin{bmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \dots & e_1 \end{bmatrix}$$

7. Пусть $\lambda \vdash n$. Рассмотрим разложение

$$e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Докажите, что коэффициент $M_{\lambda\mu}$ равен числу матриц $A = [a_{ij}]$ достаточно большого порядка (скажем, $n \times n$), таких, что $a_{ij} = 0, 1$ и

$$\sum_j a_{ij} = \lambda_i, \qquad \sum_i a_{ij} = \mu_j.$$

8. Аналогично, коэффициент $N_{\lambda\mu}$ в разложении

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu.$$

равен числу матриц $B = [b_{ij}]$ достаточно большого порядка (скажем, $n \times n$), таких, что $b_{ij} = 0, 1, 2, \dots$ (это единственное отличие!) и

$$\sum_j b_{ij} = \lambda_i, \qquad \sum_i b_{ij} = \mu_j.$$