Введение в алгебраическую комбинаторику. Листок 2. 16 февраля 2004

1. Диаграмма Юнга λ имеет вид $(\underbrace{k,\ldots,k}_{l})$. Как выглядит транспонированная диаграмма λ'?

2. Пусть λ — диаграмма с n клетками и d — число ее клеток на диагонали. Докажите, что $d \le \sqrt{n}$.

3. Положим $\Delta(u_1,\ldots,u_N) = \prod_{1\le i<j\le N}(u_i - u_j)$. Вычислите $\Delta(N, N-1, N-2, \ldots, 1)$.

4. Вычислите размерность диаграммы из задачи 1.

5. Опишите все диаграммы Юнга λ, для которых есть только одна диаграмма $\mu \nearrow \lambda$. Напомним, что $\mu \nearrow \lambda$ означает, что μ получается из λ удалением одной клетки.

6. Докажите, что всякий антисимметрический многочлен $f(u_1,\ldots,u_N)$ представляется в виде $g(u_1,\ldots,u_N)\Delta(u_1,\ldots,u_N)$, где g — симметрический многочлен.

7. Докажите, что многочлен

$$f(u_1,\ldots,u_N) = \sum_{r=1}^{N} u_r \Delta(u_1,\ldots,u_{r-1}, u_r - 1, u_{r+1},\ldots,u_N)$$

(единичка вычитается из r–й переменной) антисимметричен.

8. Докажите, что для любой диаграммы Юнга λ число диаграмм ν, таких, что $\lambda \nearrow \nu$, на 1 больше числа диаграмм μ, таких, что $\mu \nearrow \lambda$.

9. Рассмотрим векторное пространство V с базисом $\{v_\lambda\}$, элементы которого параметризованы произвольными диаграммами Юнга λ. Введем в V скалярное произведение, объявив базис ортонормальным. Далее, введем в V линейные операторы U и D (от слов up и down), действующие на базисные элементы по формуле

$$Uv_\lambda = \sum_{\nu:\ \lambda\nearrow\nu} v_\nu, \qquad Dv_\lambda = \sum_{\mu:\ \mu\nearrow\lambda} v_\mu.$$

Докажите, что эти операторы сопряжены друг другу в том смысле, что $(Uv, w) = (v, Dw)$, $(Dv, w) = (v, Uw)$ для любых $v, w \in V$.

10. Докажите, что для любой диаграммы Юнга λ с n клетками

$$U^n v_\varnothing = \sum_{\lambda\vdash n} (\dim\lambda) v_\lambda$$

(сумма по диаграммам с n клетками).

11*. Докажите, что операторы U и D удовлетворяют перестановочному соотношению $DU - UD = 1$.

12**. Докажите тождество $\sum_{\lambda\vdash n}(\dim\lambda)^2 = n!$. Указание: докажите сначала, что левая часть равна $(U^n v_\varnothing, U^n v_\varnothing)$. Затем используйте результаты задач 9 и 11 и тот факт, что $Dv_\varnothing = 0$.