Введение в алгебраическую комбинаторику. Листок 3. 1 марта 2004

1. Проверьте непосредственно формулу Якоби–Труди $s_\lambda = \det[h_{\lambda_i - i + j}]$ для двух переменных.

2. Докажите формулу Коши

$$\det\left[\frac{1}{1-x_iy_j}\right]_{i,j=1}^N = \frac{\Delta(x_1,\dots,x_N)\Delta(y_1,\dots,y_N)}{\prod\limits_{i,j=1}^N(1-x_iy_j)}$$

3. Докажите многомерный аналог формулы бинома:

$$s_\lambda(1+x_1,\dots,1+x_N) = \sum_{\mu\subset\lambda}\det\left[\binom{\lambda_i+N-i}{\mu_j+N-j}\right]_{i,j=1}^N s_\mu(x_1,\dots,x_N).$$

4. Пусть λ — диаграмма Юнга, $\ell(\lambda)$ — число ее ненулевых строк, запись $\square\in\lambda$ означает "$\square$ есть клетка диаграммы λ", и $h(\square)$ — длина крюка. Докажите, что для любого $N\ge\ell(\lambda)$

$$\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^N(1-q)\dots(1-q^{\lambda_i+N-i})}{\prod\limits_{1\le i<j\le N}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j})}.$$

5. Содержание клетки $\square=(i,j)$ определяется как $j-i$. Докажите, что

$$s_\lambda(1,q,\dots,q^{N-1}) = q^{n(\lambda)}\prod_{\square\in\lambda}\frac{1-q^{N+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}},$$

где $n(\lambda)=\sum_{i\ge1}(i-1)\lambda_i$. Проверьте, что если $N<\ell(\lambda)$, то правая часть равна 0, как и должно быть. Если $|q|<1$, чему равно $s_\lambda(1,q,q^2,\dots)$?

6. Докажите, что если $\ell(\lambda)\le N$, то

$$s_\lambda(\underbrace{1,\dots,1}_N) = \prod_{1\le i<j\le N}\frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i} = \prod_{\square\in\lambda}\frac{N+c(\lambda)}{h(\square)}.$$

7. Условимся писать $\mu\prec\lambda$, если $\lambda_1\ge\mu_1\ge\lambda_2\ge\mu_2\ge\dots$; на языке диаграмм это означает, что λ получается из μ "приклеиванием горизонтальной полоски" (горизонтальная полоска — это набор клеток, содержащий не более одной клетки в каждом столбце). Докажите "правило ветвления полиномов Шура"

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_N)\,|_{x_n=1} = \sum_{\substack{\mu\prec\lambda\\ \ell(\mu)\le N-1}} s_\mu(x_1,\dots,x_{N-1}).$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

8. Докажите, что

$$s_\lambda \cdot h_k = \sum_{\nu:\ \lambda \prec \nu, |\nu| = |\lambda| + k} s_\nu \,.$$

9*. Пусть μ и λ — две диаграммы, причем $|\mu| < |\lambda|$. *Косой размерностью* $\dim(\mu, \lambda)$ называется число ориентированных путей в графе Юнга от μ к λ. Если $\mu = \varnothing$, то получаем просто $\dim \lambda$. Обобщите формулу Фробениуса на косую размерность.

10*. Пусть $(a \mid b) = (a+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b})$ — крюковая диаграмма в обозначении Фробениуса. Докажите, что

$$\prod_i \frac{1 + x_i u}{1 - x_i t} = H(t)E(u) = 1 + (u + t) \sum_{a, b \geq 0} s_{(a|b)} t^a u^b.$$

11*. Пусть $\lambda \subset \nu$ — две диаграммы. Говорят, что $\nu - \lambda$ есть косой крюк (или змейка), если $\nu - \lambda$ не содержит квадрата 2×2. Высотой косого крюка называется количество строк, которые он занимает, минус 1; обозначение $\mathrm{ht}(\nu - \lambda)$ от английского height. Докажите, что

$$s_\lambda \cdot p_r = \sum_\nu (-1)^{\mathrm{ht}(\nu - \lambda)} s_\nu \,,$$

где сумма берется по всем диаграммам $\nu \supset \lambda$, таким, что $\nu - \lambda$ есть косой крюк и $|\nu| = |\lambda| + r$.

12*. Докажите *"дуальную формулу Якоби-Труди"*

$$s_\lambda = \det \left[e_{\lambda'_i - i + j} \right],$$

где λ' — транспонированная диаграмма.

13*. Обобщение задачи 2: докажите, что если N, M – два натуральных числа и $N < M$, то

$$\frac{\Delta(x_1, \ldots, x_N)\Delta(y_1, \ldots, y_M)}{\prod\limits_{i=1}^{N} \prod\limits_{j=1}^{M} (1 - x_i y_j)}$$

$$= \sum_{Y' \sqcup Y''} \pm \Delta(y'_1, \ldots, y'_{M-N}) \det \left[\frac{1}{1 - x_i y''_j} \right]_{i,j=1}^{N}$$

где сумма берется по всем разбиениям группы упорядоченных переменных $y_1, \ldots, y_M$ на две непересекающиеся подгруппы $y'_1, \ldots, y'_{M-N}$ и $y''_1, \ldots, y''_N$ с сохранением порядка переменных в каждой из подгрупп. Чему равен знак $\pm$?