Введение в алгебраическую комбинаторику. Листок 4. 15 марта 2004

Обозначения: $\lambda, \rho \vdash n$ (разбиения числа n); χ^λ — неприводимый характер симметрической группы $S(n)$; χ^λ_ρ — его значение на перестановках из $S(n)$ с цикловой структурой ρ; $p_\rho = \sum_\lambda \chi^\lambda_\rho s_\lambda$ — формула Фробениуса.

1. Докажите, что $\chi^\lambda_{(1^n)}$ (т.е. размерность представления с характером χ^λ) совпадает с $\dim \lambda$.

2. Докажите *правило ветвления Юнга*: сужение характера χ^λ на подгруппу $S(n-1) \subset S(n)$ совпадает с $\sum_{\mu \nearrow \lambda} \chi^\mu$.

3. Пусть $n = k + l$ и $\mu \vdash k$, $\nu \vdash l$. Определим числа $c^\lambda_{\mu\nu}$ из равенства $s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu}$. (Они называются *коэффициентами Литтлвуда–Ричардсона*, Littlewood–Richardson). Иными словами, это структурные константы алгебры Λ в базисе функций Шура.

Докажите, что сужение χ^λ на подгруппу $S(k) \times S(l)$ совпадает с $\sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu} \chi^\mu \otimes \chi^\nu$.

4. Пусть $\lambda \vdash n$, $l_i = \lambda_i + n - i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $r = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$\frac{\chi^\lambda_{(r,1^{n-r})}}{\dim \lambda} = \frac{(n-r)!}{n!} \sum_{i=1}^n \frac{l_i!}{(l_i - r)!} \prod_{j:\ j \neq i} \frac{l_i - l_j - r}{l_i - l_j}\,.$$

5. Пусть $Z(S(n))$ — векторное пространство функций на $S(n)$, постоянных на классах сопряженных элементов. Выделим в нем два базиса: характеры χ^λ и характеристические функции классов C_ρ. Пусть Λ^n — однородная компонента степени n в Λ. Определим линейный изоморфизм $\mathrm{ch} : Z(S(n)) \to \Lambda^n$ из условия $\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda$ (он называется *характеристическим отображением*).

Докажите, что $\mathrm{ch}(C_\rho) = p_\rho / z_\rho$, где $n!/z_\rho$ — число элементов в классе с индексом ρ. Докажите, что если записать ρ как $(1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$, то $z_\rho = \prod_i i^{m_i} m_i!$.

6. Пусть 1_n — функция на $S(n)$, тождественно равная 1. Докажите, что $\mathrm{ch}(1_n) = h_n$. Указание: предварительно докажите, что $h_n = \sum_{\rho \vdash n} p_\rho / z_\rho$. Выведите отсюда, что $\chi^{(n)}$ есть единичный характер 1_n.

7. Пусть ε_n — функция на $S(n)$, равная ± 1 (сигнатура перестановки). Докажите, что $\mathrm{ch}(\varepsilon_n) = e_n$. Указание: предварительно докажите, что $e_n = \sum_{\rho \vdash n} (-1)^{n - \ell(\rho)} p_\rho / z_\rho$. Выведите отсюда, что $\chi^{(1^n)}$ есть сигнатурный характер ε_n.

8*. Пусть $f \in Z(S(k))$, $g \in Z(S(l))$ и $n = k + l$. Определим результат умножения $f \circ g$ как функцию на $S(n)$ следующим образом. Пусть $G = S(n)$, $H = S(k) \times S(l)$, и пусть F — функция на G, равная $f \otimes g$ на H и нулю на $G \setminus H$. Тогда

$$(f \circ g)(x) = \sum_{y \in G/H} F(yxy^{-1}).$$

Докажите, что $\mathrm{ch}(f \circ g) = \mathrm{ch}(f)\,\mathrm{ch}(g)$.

9. Докажите, что $\chi^\lambda = \det^\circ [1_{\lambda_i - i + j}]$, где символ $\det^\circ$ означает, что надо раскрыть определитель по обычному правилу и затем заменить обычное умножение операцией “$\circ$”. При этом считается, что $1_n = 0$, если $n < 0$.